DM : EV Préhilbertiens

CCP 2024

Le but de ce problème est de démontrer et utiliser plusieurs critères pour prouver qu'une matrice symétrique réelle est définie positive. On rappelle que, pour un entier naturel non nul n, une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si :

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\quad X^{\mathrm{T}} MX > 0\,.$$

Q8. Démontrer, en utilisant directement la définition précédente, que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle pour que celle-ci soit définie positive.

Q10. Application : Démontrer que le polynôme $P(X) = X^3 - 6X^2 + 9X - 3$ admet trois racines réelles distinctes (on ne cherchera pas à les déterminer).

Démontrer alors que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive grâce à la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Dans cette partie, on souhaite démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si sa trace et son déterminant sont strictement positifs.

Q11. Démontrer qu'une matrice définie positive M de taille quelconque vérifie toujours $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Démontrer qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, dont la trace et le déterminant sont strictement positifs, est définie positive.

Q13. Le résultat de la question précédente reste-t-il vrai pour les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q14. Application : Utiliser le résultat précédent afin de démontrer que $f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$ admet un extremum local. Préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local.

Le critère de Sylvester

Dans cette partie, on étudie le *critère de Sylvester*, valable en toute dimension.
Pour une matrice carrée quelconque $M = \left(m_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, on définit *le k-ième mineur principal* comme étant le déterminant de la matrice $M_k = \left(m_{i,j}\right)_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. On précise qu'une matrice carrée de taille n possède n mineurs principaux.

Par exemple, les trois mineurs principaux de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de la **question Q10.** sont les déterminants des matrices $B_1 = (1)$, $B_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B_3 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On dit qu'une matrice vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs. On souhaite alors démontrer la caractérisation suivante :

Une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

Par exemple, pour la matrice B de la **question Q10.**, on constate que :

$$\det(B_1) = 1 > 0, \quad \det(B_2) = 2 > 0 \quad \text{et} \quad \det(B_3) = 3 > 0.$$

La matrice B vérifie le critère de Sylvester, elle est donc définie positive.

Q15. On fixe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un entier $k \in [\![1, n]\!]$, ainsi qu'un vecteur colonne $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Déterminer un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que :

$$X_k^{\mathsf{T}} M_k X_k = X^{\mathsf{T}} MX .$$

Q16. Démontrer que toute matrice symétrique réelle définie positive vérifie le critère de Sylvester.

Dans les deux questions suivantes, il s'agit de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive. Pour cela, on va raisonner par récurrence sur la taille n de la matrice.

Q17. Soit $n \geq 2$ et soit une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. On écrit cette matrice par blocs sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^{\mathsf{T}} & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}), \quad U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

On suppose que la matrice M_{n-1} est définie positive.
Justifier l'existence d'un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que $M_{n-1}V + U = 0$.

En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, démontrer alors que $Q^{\mathsf{T}} M Q$ s'écrit par blocs $\begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

Q18. Démontrer par récurrence que toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Q20. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ? Justifier.

Q21. Démontrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 3xz > 0.$$

Q22. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice $S_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle définie positive ?

CCINP 2024 MP Mathématiques 2

Problème

Proposition de corrigé

Q8. Tout d'abord, la matrice A est symétrique réelle.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; on a

$$X^\top AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2$$

Or x_1 et $x_1 + x_2$ sont des réels, leurs carrés sont des réels positifs donc $X^\top AX \geqslant 0$; de plus, l'égalité $X^\top AX = 0$ entraîne $x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = 0$ donc $x_1 = 0$ puis $x_2 = 0$. Par contraposée, si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^\top AX > 0$; par définition, A est définie positive.

Caractérisation spectrale

Q9. Il s'agit de redémontrer l'équivalence suivante :

> *Une matrice symétrique réelle $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives.*

Supposons que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M : en prenant pour X un vecteur propre associé à λ, X est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $X^\top MX > 0$ d'après la définition de la définie-positivité ; d'autre part $X^\top MX = X^\top(\lambda X) = \lambda(X^\top X)$ et $X^\top X$ est égal au produit scalaire canonique (qui est défini positif) de X avec lui-même, donc $X^\top X > 0$; on en déduit que $\lambda > 0$.

Supposons, réciproquement, que M est une matrice symétrique réelle à valeurs propres strictement positives. D'après le théorème spectral il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M, de valeurs propres respectives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: en notant $(x_1, \ldots, x_n)$ le n-uplet de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$X^\top MX = \Big(\sum_{i=1}^n x_i\epsilon_i\Big)^\top M\Big(\sum_{j=1}^n x_j\epsilon_j\Big) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j(\epsilon_i^\top \underbrace{M\epsilon_j}_{=\lambda_j\epsilon_j}) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\lambda_j\underbrace{(\epsilon_i^\top\epsilon_j)}_{=\delta_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ le terme $\lambda_i x_i^2$ est un réel positif, donc la somme $X^\top MX$ est positive ; de plus, si cette somme est nulle alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $\lambda_i x_i^2 = 0$, donc $x_i = 0$ puisque $\lambda_i > 0$, donc le vecteur X est nul. Ainsi pour tout vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le réel $X^\top MX$ est strictement positif : on conclut que M est une matrice symétrique définie positive.

Q10. On étudie grossièrement la fonction polynomiale associée à P, qui est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$; en évaluant P en 0, en les racines de $P'(X) = 3X^2 - 12X + 9 = 3(X-1)(X-3)$ et en considérant la limite de P en $+\infty$ on constate que

$$P(0) = -3 < 0, \qquad P(1) = 1 > 0, \qquad P(3) = -3 < 0, \qquad P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'image de chacun des intervalles $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, +\infty[$ est un intervalle contenant 0, donc P s'annule au moins une fois sur chaque intervalle ouvert $]0, 1[$, $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$. Comme P est de degré 3, on conclut que P admet exactement trois racines réelles distinctes α, β, γ telles que

$$0 < \alpha < 1 < \beta < 3 < \gamma$$

en particulier, toutes les racines de P sont strictement positives.

La matrice B est symétrique réelle ; on calcule son polynôme caractéristique :

$$\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)(X-3) - (X-2) - (X-1) = P(X)$$

Ainsi les valeurs propres de B, qui sont les racines α, β, γ de P, sont toutes strictement positives : d'après la caractérisation spectrale rappelée à la **question Q9.**, B est une matrice symétrique définie positive.

On peut aussi commencer par observer que $P = \chi_B$; B est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle (théorème spectral), donc $P(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. On vérifie ensuite que les racines de P' ne sont pas des racines de P, donc toute racine de P est simple : P possède trois racines réelles simples distinctes. Enfin, pour tout réel $x \leqslant 0$ on a $P(x) < 0$ en tant que somme de réels négatifs et d'un réel strictement négatif ; ainsi toute racine de P, donc toute valeur propre de B, est strictement positive, et on conclut que la matrice symétrique B est définie positive à l'aide de la caractérisation spectrale.

Un critère en dimension 2

Q11. Soit M une matrice symétrique définie positive, d'ordre $n \geqslant 1$. D'après le théorème spectral M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc sa trace et son déterminant sont respectivement égaux à la somme et au produit de ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité ; il s'agit d'une famille non vide vu que $n \geqslant 1$) ; comme les valeurs propres sont des réels strictement positifs, il en résulte que $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$.

Q12. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\mathrm{Tr}(M) > 0$ et $\det(M) > 0$. D'après le théorème spectral M possède deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 (non nécessairement distinctes) ; de la relation $\lambda_1\lambda_2 = \det(M) > 0$ on déduit que λ_1 et λ_2 sont des réels non nuls de même signe, et de la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(M) > 0$ on déduit que λ_1 et λ_2 sont strictement positifs. D'après la caractérisation spectrale rappelée à la **question Q9.**, M est définie positive.

*Remarque : ce critère est établi dans le cours sur l'optimisation au second ordre, dans le cas d'une fonction de deux variables, où l'on établit que la matrice hessienne en un point critique est définie positive si et seulement si (en notation de Monge) $rt - s^2 > 0$ et $r + t > 0$; la **question Q14.** donne un exemple d'application.*

Q13. $\boxed{\text{Non}}$ le critère ne se généralise pas à des matrices symétriques réelles d'ordre $n > 2$; on peut considérer par exemple la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(3, -I_2, I_{n-3})$ (explicitement pour $n = 3$: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$), qui est symétrique réelle, de trace égale à $n - 2 > 0$ et déterminant égal à $3 > 0$, mais qui possède des valeurs propres négatives, donc n'est pas définie positive d'après la caractérisation spectrale de la **question Q9.**.

Q14. La fonction f est rationnelle donc de classe C^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$; ses dérivées partielles premières et secondes ont pour expressions : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{xy^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{xy^3}.$$

Les éventuels points d'extremum local de f sont des points critiques ; pour $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{x^2y} = 1 \\ \dfrac{1}{x^2y} = \dfrac{1}{xy^2} \end{cases} \iff x = y = 1$$

donc le seul point critique de f est $(1, 1)$. En ce point, la matrice hessienne de f est $Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; sa trace et son déterminant sont strictement positifs (respectivement égaux à 4 et 3), donc d'après le critère établi à la **question Q12.** $Hf(1, 1)$ est définie positive. Il en résulte que

$$\boxed{f \text{ admet un minimum local (strict) en } (1,1).}$$

Il s'agit effectivement d'un point de minimum global : en utilisant l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique (ou la concavité du logarithme népérien), pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ on a

$$f(x,y) = 3\frac{x + y + (xy)^{-1}}{3} \geqslant 3\sqrt[3]{xy(xy)^{-1}} = 3 = f(1,1).$$

Le critère de Sylvester

Q15. *Erreur d'énoncé : en général on ne peut pas imposer que X soit non nul si X_k est nul : par exemple si M est définie positive alors pour tout vecteur X non nul on a $X^\top MX > 0$ alors que $X_k^\top M_kX_k = 0$ lorsque $X_k = 0$.*

On peut effectuer des calculs par blocs. En posant $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on obtient

$$X^\top MX = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_kX_k + 0_{n-k,1} \\ * \end{pmatrix} = X_k^\top M_kX_k + 0$$

et le vecteur X est non nul si et seulement si X_k est non nul.

Q16. Soit M une matrice symétrique réelle définie positive et soit $k \in [\![1,n]\!]$. On considère un vecteur non nul quelconque $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$: d'après la **question Q15.** il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_k^\top M_k X_k = X^\top M X$, et ce réel est strictement positif car M est définie positive ; il en résulte que M_k est définie positive, donc d'après la **question Q11.** on a $\det(M_k) > 0$. Ainsi M vérifie le critère de Sylvester.

Q17. La matrice M_{n-1} étant définie positive, son déterminant est strictement positif (**question Q11.**) donc elle est inversible, et l'équation $M_{n-1}V + U = 0$ admet comme solution $V = -M_{n-1}^{-1}U$.
De plus, comme la matrice M_{n-1} est symétrique on a aussi

$$V^\top M_{n-1} + U^\top = V^\top M_{n-1}^\top + U^\top = (M_{n-1}V + U)^\top = 0_{1,n-1}$$

À l'aide d'un calcul par blocs on obtient alors :

$$\begin{aligned} Q^\top M Q &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc en posant $\beta = U^\top V + \alpha$ on obtient la forme voulue : $Q^\top M Q = \mathrm{Diag}(M_{n-1}, \beta)$.
Enfin, on compare les déterminants, en observant que $\det(Q) = \det(Q^\top) = 1$ (déterminant d'une matrice triangulaire par blocs) :

$$\det(M_{n-1})\beta = \det\big(\mathrm{Diag}(M_{n-1},\beta)\big) = \det(Q^\top M Q) = \det(Q^\top)\det(M)\det(Q) = \det(M)$$

or $\det(M) > 0$ par hypothèse et $\det(M_{n-1}) > 0$, donc $\beta > 0$.

Q18. On considère le prédicat

$\mathcal{H}(n)$: si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique vérifiant le critère de Sylvester, alors M est définie positive.

Dire qu'une matrice $M = (m) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vérifie le critère de Sylvester signifie que $m > 0$, donc $(x)^\top M(x) = mx^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et la matrice M est définie positive : la proposition $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{H}(n-1)$ pour un certain entier $n \geqslant 2$ et on considère une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester. Le déterminant de M est un mineur principal de M, donc $\det(M) > 0$; les autres mineurs principaux de M sont aussi les mineurs principaux de la sous-matrice M_{n-1}, qui est également symétrique ; par hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(n-1)$, la matrice M_{n-1} est définie positive. D'après la **question Q17.**, il existe une matrice Q inversible (en fait, triangulaire avec tous les coefficients diagonaux égaux à 1) et un réel $\beta > 0$ tels que $Q^\top M Q = \mathrm{Diag}(M_{n-1}, \beta)$. Étant donné $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on écrit $Q^{-1}X = \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $z \in \mathbb{R}$; on effectue un calcul par blocs :

$$\begin{aligned} X^\top M X = \left(Q\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix}\right)^\top MQ\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y^\top & z \end{pmatrix} (Q^\top M Q) \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y^\top & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{n-1} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = Y^\top M_{n-1} Y + \beta z^2 \end{aligned}$$

On a $\beta z^2 \geqslant 0$ et $Y^\top M_{n-1} Y \geqslant 0$ car M_{n-1} est définie positive, donc $X^\top M X \geqslant 0$; de plus, l'égalité $X^\top M X = 0$ entraîne $Y^\top M_{n-1} Y = 0$ et $\beta z^2 = 0$, donc $Y = 0$ et $z = 0$, et finalement $X = Q\begin{pmatrix} Y \\ z \end{pmatrix} = 0$ aussi. On a donc établi que la matrice M est définie positive, et que $\mathcal{H}(n-1)$ implique $\mathcal{H}(n)$.
Par récurrence, on conclut que $\mathcal{H}(n)$ est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit : toute matrice symétrique réelle vérifiant le critère de Sylvester est définie positive.

Q19. Pour tout réel x, la matrice $C(x)$ est symétrique réelle ; ses mineurs principaux sont, dans l'ordre : 2, 1 et

$$\det C(x) = 2 - 1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Les deux premiers sont strictement positifs pour tout x, donc d'après le critère de Sylvester la matrice $C(x)$ est définie positive si et seulement si $1 - 2x^2 > 0$, à savoir $\boxed{x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[}$

Q20. On constate que la matrice de l'énoncé est symétrique réelle. En calculant dans l'ordre ses mineurs principaux, on constate que le troisième est négatif :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 2 - 3 - 2 - 4 < 0$$

D'après la condition nécessaire du critère de Sylvester, $\boxed{\text{la matrice n'est pas définie positive}}$

Q21. La fonction $q : (x,y,z) \longmapsto 4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz$ est polynomiale de degré 2, on peut l'exprimer à l'aide de la formule de Taylor matricielle (le reste étant nul dans ce cas), par rapport à $(0,0,0)$: on a $q(0,0,0)=0$, la matrice jacobienne de q en $(0,0,0)$ est nulle, donc en notant H la matrice hessienne de q en $(0,0,0)$ et X le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}^\top$,

$$q(x,y,z) = \frac{1}{2} X^\top H\, X \qquad \text{où} \qquad H = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or les mineurs principaux de H valent dans l'ordre :

$$8, \qquad \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12, \qquad \begin{vmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

en particulier ils sont tous strictement positifs ; d'après le critère de Sylvester la matrice symétrique réelle H est définie positive, donc pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ le réel $X^\top H X$ est strictement positif, donc $q(x,y,z) > 0$.

Un raisonnement plus élémentaire consiste à décomposer l'expression en une somme de carrés, comme à la ***question Q8.*** *: pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a*

$$4x^2+y^2+z^2+2xy-3xz = (x+y)^2 + \left(\frac{3}{2}x - z\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si les trois termes sont nuls, à savoir $x=0$ (dernier terme) et $y=z=0$.

Q22. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la matrice S_n est symétrique réelle, et pour $k \in [\![1,n]\!]$ son $k^{\text{ème}}$ mineur principal est le déterminant de la matrice S_k ; d'après le critère de Sylvester, S_n est définie positive si et seulement si $\det(S_k) > 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. On calcule directement ce déterminant pour $k \in \{1,2\}$: $\det(S_1) = \sqrt{3} > 0$ et $\det(S_2) = 2 > 0$; on forme ensuite une relation de récurrence d'ordre 2 pour $k \geqslant 3$ en développant les déterminants selon une rangée :

$$\det(S_k) \overset{\text{dév.}C_k}{=} \sqrt{3}\det(S_{k-1}) - 1\det\begin{pmatrix} S_{k-2} & * \\ 0_{1,k-2} & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{dév.}L_{k-1}}{=} \sqrt{3}\det(S_{k-1}) - \det(S_{k-2})$$

On calcule alors (*la résolution de cette relation de récurrence linéaire à coefficients constants est également possible mais non nécessaire*) :

$$\det(S_3) = \sqrt{3} > 0, \qquad \det(S_4) = 1 > 0, \qquad \det(S_5) = 0$$

$$\boxed{\text{La matrice symétrique } S_n \text{ est définie positive si et seulement si } n \in \{1,2,3,4\}.}$$