

## Devoir Surveillé (4h)

### Algèbre Linéaire

#### Exercice

1. On désigne par  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3. On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  a base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et par  $I_3$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On considère dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) Vérifier que  $PQ = 4I_3$ .  
b) En déduire que  $P$  est une matrice inversible et calculer sa matrice inverse  $P^{-1}$ .

3. On considère les vecteurs suivants :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que  $u$  est un vecteur propre de la matrice  $A$  dont on précisera la valeur propre  $\alpha$  correspondante. Autrement dit, vérifiez que  $A \cdot u = \alpha \cdot u$ , où  $\alpha$  nombre réel à préciser  
b) Montrer que  $v$  et  $w$  sont deux vecteurs propres de la matrice  $A$  associés à la même valeur propre  $\beta$  dont on précisera sa valeur.  
c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale  $D$  à préciser telle que  $A = PDP^{-1}$ .
4. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .  
b) Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $D^n$  en fonction de  $n$ .  
c) En déduire pour tout entier naturel  $n$ , l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$  sous forme d'un tableau.

## Problème 1.

Dans tout le problème  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on désigne par  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ ,  $n \geq 1$

### Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , de rang  $n - 1$ . On note  $u$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $U$ .

1. Soient  $r$  et  $s$  deux entiers naturels et  $v$  la restriction de  $u^s$  à  $\text{Im}(u^r)$ .
  - a) Vérifier que  $\text{Im}(v) = \text{Im}(u^{s+r})$ .
  - b) Montrer que  $\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$ .
  - c) Montrer que  $\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))$ .
  - d) En déduire que pour tout entier naturel  $i$ ,  $\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i$ .
2. On suppose de plus que  $U^n = 0$ .
  - a) Montrer que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$ .
  - b) Montrer que l'indice de nilpotence de  $u$  est égal à  $n$ .
  - c) En déduire qu'il existe un vecteur  $e$  de  $E$  tel que  $\mathcal{B}_e = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$  soit une base de  $E$ .
  - d) Ecrire la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}_e$ .
3. Montrer que deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de rang  $n - 1$  sont semblables.

### Partie 4: Cycles

Dans cette partie, on prend  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . On dit qu'un endomorphisme  $f$  de  $E$  est cyclique d'ordre un entier naturel non nul  $p$  s'il existe  $x_0$  de  $E$  vérifiant les conditions :

- $f^p(x_0) = x_0$ .
- $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est une famille génératrice de  $E$  dont les éléments sont distincts deux à deux.

2. Soit  $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  un  $n$ -cycle de  $f$ .

- a) Justifier que  $\mathcal{B}_{x_0}$  est une base de  $E$ .
- b) Déterminer la matrice  $G$  de l'endomorphisme  $f$  dans la base  $\mathcal{B}_{x_0}$ .

c) On pose  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$  et pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $U_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{-k} \\ \bar{\omega}^{-2k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{-nk} \end{pmatrix}$ , où  $\bar{\omega}$  désigne le conjugué de  $\omega$ .

Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , vérifier que  $U_k$  est un vecteur propre de  $G$  associé à une valeur propre  $\alpha_k$  à déterminer.

3. Soit  $M = (m_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , telle que  $m_{k,l} = \bar{\omega}^{-kl}$ . On note  $\bar{M} = (\bar{m}_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ , où  $\bar{m}_{k,l}$  est le conjugué de  $m_{k,l}$ .

- a) Calculer  $M \bar{M}$ .
- b) En déduire que  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  et calculer  $M^{-1}$ .

## Problème 2

On désigne par  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $E = \mathbb{K}^n$ .

Pour tout endomorphisme  $u$  de  $E$ , on note  $\text{Ker}(u)$  le noyau de  $u$ , et  $\text{Im}(u)$  l'image de  $u$ .

1. Question de cours : Soient  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ .

Dans la suite de l'exercice,  $u$  désigne un endomorphisme de  $E$  tel que  $u^2 = 0$ .

2. Démontrer que  $\text{Im}(u)$  est contenu dans  $\text{Ker}(u)$ .
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de  $u$  ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que  $n = 2$ , soit  $E = \mathbb{K}^2$ . On suppose ici  $u$  non nul.
  - (a) Démontrer qu'il existe une droite  $D$  dans  $E$  telle que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$ .
  - (b) Soit  $v$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $v^2 = 0$  et  $u \circ v = v \circ u$ .
    - i. Démontrer que  $v(D) \subset D$ .
    - ii. Démontrer que  $u \circ v = 0$ .
  - (c) Soient  $v$  et  $w$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $v^2 = 0$ ,  $w^2 = 0$ ,  $u \circ v = v \circ u$  et  $u \circ w = w \circ u$ . Démontrer que  $v \circ w = 0$ .

5. On revient au cas général. Soit  $m$  un entier naturel  $\geq 2$ . Soient  $u_1, \dots, u_m$  des endomorphismes de  $E$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, m\}^2, u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose  $F_1 = \text{Im}(u_1)$  et pour un entier  $i$  compris entre 2 et  $m$ ,  $F_i = \text{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_{i-1} \circ u_i)$ .

- (a) Démontrer que, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $m - 1$ ,  $F_i$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u_{i+1}$ .
  - (b) En déduire que, pour tout entier  $i$  compris entre 1 et  $m$ ,  $F_i$  est de dimension au plus  $\frac{n}{2^i}$ .
  - (c) Dans le cas où  $n < 2^m$ , démontrer que l'endomorphisme  $u_1 \circ u_2 \circ \dots \circ u_m = 0$ .
6. On suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Pour toute matrice  $A$ , on note  $\text{Ker}(A)$  le noyau de  $A$ , et  $\text{Im}(A)$  l'image de  $A$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On note  ${}^tA$  la matrice transposée de  $A$ .

- (a) Démontrer que  $E = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$ .
- (b) On suppose de plus  $A^2 = 0$ . Démontrer que  $\text{Im}(A + {}^tA) = \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$ .



**Concours National Commun**  
**Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2**  
**Session 2024 - Filière MP**

**Exercice**

1. a) On vérifie que :  $PQ = 4I_3$ .

b) Donc  $P^{-1} = \frac{1}{4}Q$ .

2. a) On a  $Au = u$  donc  $\alpha = 1$ .

b) On a  $Av = 2v$  et  $Aw = 2w$  donc  $\beta = 2$ .

c) On a  $Sp(A) = \{1, 2\}$ ,  $\dim E_1(A) = 1$  et  $\dim E_2(A) = 2$ , donc  $E_1(A) \oplus E_2(A) = \mathbb{R}^3$  par suite  $A$  est diagonalisable .  $P$  est la matrice de passage de la base canonique vers la base des vecteurs propres .

Soit  $D = \text{diag}(1, 2, 2)$ , on a alors  $A = PDP^{-1}$ .

3. a) C'est vrai pour 1, supposons le pour  $n$ , alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A.A^n \\ &= (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) \\ &= (PD^{n+1}P^{-1}) \end{aligned}$$

d'où le résultat pour  $n + 1$ . D'où pour tout entier  $n$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

b) On a  $D^n = \text{diag}(1, 2^n, 2^n)$ .

c) Après calcul on trouve  $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 1 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 1 - 2^n & 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$

## Problème.

### Partie 2 : Les endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$

Soit  $U$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , de rang  $n - 1$ . On note  $u$  l'endomorphisme de  $E$  canoniquement associé à  $U$ .

1. Soient  $r$  et  $s$  deux entiers naturels et  $v$  la restriction de  $u^s$  à  $\text{Im}(u^r)$ .

a) On a  $\text{Im}(v) = v(\text{Im}(u^r)) = u^s(\text{Im}(u^r)) = \text{Im}(u^{s+r})$ .

b) On a  $\text{Ker}(v) = \text{Im}(u^r) \cap \text{Ker}(u^s) \subset \text{Ker}(u^s)$ .

c) De la question a) on a  $\dim(\text{Im}(v)) = \dim \text{Im}(u^{s+r})$ , le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Im}(u^{s+r}) + \dim \text{Ker}(u^{s+r}) = n \text{ et } \dim \text{Im}(v) + \dim \text{Ker}(v) = \dim \text{Im}(u^r)$$

donc

$$n - \dim \text{Ker}(u^{s+r}) = \dim \text{Im}(u^r) - \dim \text{Ker}(v)$$

comme  $\dim \text{Im}(u^r) = n - \dim(\text{Ker}(u^r))$  alors

$$\dim \text{Ker}(u^{s+r}) = \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim \text{Ker}(v)$$

$\text{Ker}(v) \subset \text{Ker}(u^s)$  donc  $\dim \text{Ker}(v) \leq \dim \text{Ker}(u^s)$  ainsi  $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^{r+s})) \leq \dim(\text{Ker}(u^r)) + \dim(\text{Ker}(u^s))}$ .

d) On prouve le résultat demandé par récurrence sur  $i$ .

- Initialisation : le résultat est vrai pour  $i = 1$  car  $v$  est de rang  $n - 1$  et donc  $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$ .
- Hérédité : soit  $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang  $i$ .

La question précédente indique que

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq \dim(\text{Ker}(u^i)) + \dim(\text{Ker}(u))$$

Comme  $u$  est de rang  $n - 1$  alors  $\text{Ker}(u)$  est de dimension 1 et l'hypothèse de récurrence donne

$$\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang  $i + 1$ .

Si  $i \geq n + 1$  le résultat est évident. Ainsi pour tout  $i$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^i)) \leq i}$ .

2. a) On a  $U^n = 0$ , donc  $u^n = 0$  et  $u^i = 0 \forall i \geq n$  par suite  $\dim(\text{Ker}(u^i)) = n \forall i \geq n$ .

On prouve le résultat demandé par récurrence sur  $i$ .

- Initialisation : le résultat est vrai pour  $i = 1$ .
- Hérédité : soit  $i \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$  tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang  $i$ .

D'après la partie 1 la suite  $(\dim(\text{Ker}(u^i)))_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante, donc

$$i = \dim(\text{Ker}(u^i)) \leq \dim(\text{Ker}(u^{i+1})) \leq i + 1$$

Si  $\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) < i + 1$  alors forcément

$$\dim(\text{Ker}(u^i)) = \dim(\text{Ker}(u^{i+1}))$$

par suite  $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^{i+1})$ .

Remarquons que si  $x \in \text{Ker}(u^{i+2})$  alors  $u(x) \in \text{Ker}(u^{i+1}) = \text{Ker}(u^i)$  et  $u^{i+1}(x) = 0$  donc  $x \in \text{Ker}(u^{i+1})$ , ainsi  $\text{Ker}(u^{i+2}) \subset \text{Ker}(u^{i+1})$  d'où  $\text{Ker}(u^{i+2}) = \text{Ker}(u^{i+1})$ .

Par récurrence on a donc  $\text{Ker}(u^i) = \text{Ker}(u^{i+1}) = \dots = \text{Ker}(u^n) = E$  ce qui est absurde.

Donc  $\dim(\text{Ker}(u^{i+1})) = i + 1$ . D'où le résultat pour  $i + 1$ .

Ainsi on a  $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\boxed{\dim(\text{Ker}(u^i)) = i}$ .

b) Soit  $i$  dans  $\llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ , on a  $\dim(\text{Ker}(u^i)) = i$ , donc  $u^i \neq 0$ .

Ainsi on a  $u^n = 0$  et pour tout  $i \leq n - 1$   $u^i \neq 0$  donc l'indice de nilpotence de  $u$  est égal à  $n$ .

c) On a  $u^{n-1} \neq 0$ , il existe donc  $e \in E \setminus \{0\}$  tel que  $u^{n-1}(e) \neq 0$ .

Montrons que  $(e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$  est libre. Pour cela, on suppose que

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$$

En composant par  $u^{n-1}$ , on a alors

$$\alpha_0 u^{n-1}(e) + \alpha_1 u^n(e) + \dots + \alpha_{n-1} u^{2n-2}(e) = 0$$

Puisque  $u^k = 0$  pour tout  $k \geq n$  alors  $\alpha_0 u^{n-1}(e) = 0$  ainsi  $\alpha_0 = 0$ .

A chaque fois on compose par  $u^{n-2}, u^{n-3}, \dots, u$ , on obtient par un processus récurent

$$\alpha_1 = \alpha_{21} = \dots = \alpha_{n-1} = 0.$$

La famille  $\mathcal{B}_e$  est donc libre et possède  $n = \dim(E)$  éléments donc c'est une base de  $E$ .

d) La matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}_e$  est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit  $A$  et  $B$  deux matrices nilpotentes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de rang  $n - 1$ , posons  $f_A$  et  $f_B$  les endomorphismes de  $E$  canoniquement associés à  $A$  et  $B$ , il existe donc deux bases  $\mathcal{B}_e$  et  $\mathcal{B}_{e'}$  de  $E$  dans lesquelles les matrices de  $f_A$  et de  $f_B$  sont identiques à la matrice de la question d), ce qui prouve que  $A$  et  $B$  sont semblables.

## Partie 4: Cycles

1. Soit  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  un  $p$ -cycle de  $f$ .

a) Pour tout entier  $k$  dans  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$  on a  $f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0)$ , comme  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est une famille génératrice de  $E$  alors  $f^p(x) = x$  pour tout  $x \in E$ , ainsi  $\boxed{f^p = \text{id}_E}$ .

b)  $E$  est de dimension  $n$ , par conséquent, une partie libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments. De plus  $x_0 \neq 0$  donc  $1 \in F_{x_0}$ . Ainsi  $F_{x_0}$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbb{N}$  donc elle admet un maximum noté  $\gamma$ .

c) i) Montrons par récurrence que  $\forall k \geq \gamma$   $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ .

- $\gamma + 1 \notin F_{x_0}$  donc  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0), f^\gamma(x_0))$  est liée, comme  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$  est libre alors  $f^\gamma(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ .

- Supposons que  $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ , alors  $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^\gamma(x_0))$  et comme  $f^\gamma(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$  on a bien  $f^{k+1}(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ .

Enfin, finalement pour tout entier  $k \geq \gamma$ ,  $\boxed{f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))}$ .

ii)  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$  est une famille génératrice de  $E$  et  $\forall k \geq \gamma$ ,  $f^k(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$ , donc

$$E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$$

comme  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{\gamma-1}(x_0))$  est libre alors c'est une base de  $E$  et  $\dim E = n = \gamma$ .

a) Soit  $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  un  $n$ -cycle de  $f$ , ce qui signifie  $\mathcal{B}_{x_0}$  est une famille génératrice de  $E$  de cardinal  $n = \dim E$  donc elle constitue une base de  $E$ .

b) On a  $f(f^{j-1}(x_0)) = \begin{cases} f^j(x_0) & \text{si } 1 \leq j \leq n-2 \\ x_0 & \text{si } j = n-1 \end{cases}$ , ce qui donne

$$G = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $GU_k = \begin{pmatrix} \bar{\omega}^{-nk} \\ \bar{\omega}^{-k} \\ \vdots \\ \bar{\omega}^{-(n-1)k} \end{pmatrix} = \bar{\omega}^{-k} U_k$ . Donc  $U_k$  est un vecteur propre de  $G$  associé à la valeur propre  $\bar{\omega}^{-k}$ .

2. Soit  $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , telle que  $m_{k,\ell} = \bar{\omega}^{k\ell}$ . On note  $\overline{M} = (\overline{m}_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ , où  $\overline{m}_{k,\ell}$  est le conjugué de  $m_{k,\ell}$ .

a) Posons  $M \overline{M} = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ . Pour tout  $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  on a

$$\begin{aligned} a_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^n m_{k,j} \overline{m}_{j,\ell} \\ &= \sum_{j=1}^n \bar{\omega}^{-kj} \omega^{j\ell} \\ &= \sum_{j=1}^n (\omega^{\ell-k})^j \end{aligned}$$

Si  $\ell = k$  alors  $a_{k,\ell} = n$  et si  $\ell \neq k$  alors  $a_{k,\ell} = \omega^{\ell-k} \frac{1 - (\omega^{\ell-k})^n}{1 - \omega^{\ell-k}} = 0$  (car  $(\omega^{\ell-k})^n = (\omega^n)^{\ell-k} = 1$ ).

On conclut que  $\boxed{M \overline{M} = nI_n}$ .

b) Ainsi  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  et  $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}}$ .

3. Soit  $(b_0, b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  et  $H = \begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} & \dots & b_2 & b_1 \\ b_1 & \ddots & \ddots & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2} & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$

a) Remarquons que  $G^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2)$  et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{x_0}}(f^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Problème 2 E3A MP épreuve B 2014

1) Soit  $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

Soit  $x \in \ker(u)$ .  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$  donc  $v(x) \in \ker(u)$ .

$\ker(u)$  est stable par  $v$ .

Soit  $x \in \text{Im}(u)$ . Soit  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ .  $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$  donc  $v(x) \in \text{Im}(u)$ .

$\text{Im}(u)$  est stable par  $v$ .

2) Soit  $x \in \text{Im}(u)$ . Soit  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ .  $u(x) = u^2(y) = 0$  donc  $x \in \ker(u)$ .

$\text{Im}(u) \subset \ker(u)$ .

3) On en déduit que  $\text{rg}(u) \leq \dim(\ker(u))$ . Par le théorème du rang, on obtient  $\text{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$ .

2)

a) Si  $n = 2$  et  $u \neq 0$ , (3) conduit à  $\text{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$ .

Alors  $D = \ker(u) = \text{Im}(u)$  est une droite

b)

(i) Soit  $v$  telle que  $u \circ v = v \circ u$  et  $v^2 = 0$ . Par (1) on sait que  $D = \text{Im}(u)$  est stable par  $v$ .

(ii)  $D$  est donc propre pour  $v$ . Or  $\text{sp}(v) = \{0\}$ .

Donc  $v = 0$  ou  $D = \ker(v) = \text{Im}(v)$ . Dans les deux cas  $u \circ v = 0$ .

c) De même, on a  $w = 0$  ou  $D = \ker(w) = \text{Im}(w)$ . Dans les deux cas  $v \circ w = 0$ .

5)

a) Posons, pour  $1 \leq i \leq m-1$ ,  $v = u_1 \circ \dots \circ u_i$ .  $v$  et  $u_{i+1}$  commutent, donc par (1),  $F_i$  est stable par  $u_{i+1}$ .

b) On effectue une récurrence sur  $i$  :

$$(H_i) \dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}.$$

$(H_1)$  est obtenu par (3).

Supposons  $(H_{i_0})$  pour  $i_0 \geq 1$ . Soit  $\tilde{u}_{i_0+1}$  le morphisme induit par  $u_{i_0+1}$  sur  $F_{i_0}$ .  $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$ . En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit  $\text{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \frac{n}{2^{i_0+1}}$ . Or  $\text{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$  car

les  $(u_i)$  commutent. D'où  $(H_{i_0+1})$ . Ceci achève la récurrence.

c) Si  $n < 2^m$ ,  $\dim F_m < 1$  donc  $\dim F_m = 0$ . Ainsi  $u_1 \circ \dots \circ u_m = 0$ .

6)

a) Par le théorème du rang,  $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Im}({}^tA)) = n$ . De plus si  $x \in \ker(A) \cap \text{Im}({}^tA)$ ,  $Ax = 0$  et  $x = {}^tAy$  donc  $A{}^tAy = 0$  et  $\|Ay\| = 0$  donc  $x = 0$ . Ainsi  $E = \ker(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$ .

b)  $\text{Im}(A + {}^tA) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$ . De plus les deux sous-espaces sont de même dimension  $2\text{rg}(A)$ . Donc  $\text{Im}(A + {}^tA) = \text{Im}(A) + \text{Im}({}^tA)$ .