Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

مُوَنِي مُولَاي اسماعِيل

Devoir Maison

Equations Différentielles

e3a 2014

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Problème

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.

2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A\cos x+B\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?

5. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$, telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$ et on considère les équations différentielles :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$
$$(E'_\alpha) \qquad xz'' + (2\alpha + 1)z' + xz = 0$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.

10. a. Rappeler une définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

10. b. On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R, R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

11. a. Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

11. c. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}a_0$.

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

13. Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction z :

$$z : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{-\alpha}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}x^{2n+\alpha}$$

Tournez la page S.V.P.

est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x, expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière. En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = k f_p'(x)$.

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x \sin t)\, dt$$

17. Démontrer que g_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme intégrale) les fonctions g_p' et g_p''.

18. En intégrant par parties $g_p'(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p).

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\, dt$.

19. a. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $n w_n = (n-1) w_{n-2}$.

19. b. Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n.

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t)\, \mathrm{d}t$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2 g_p'(x)$$

23. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les fonctions g_p et f_p sont égales.

Partie V

On considère dans cette partie un réel $x \in \mathbb{R}$ fixé et on définit la fonction :

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) \end{array}$$

(où Re *désigne la partie réelle). On reprend par ailleurs les notations définies dans les parties précédentes.*

24. Démontrer que g est périodique de période 2π.

25. Les coefficients de Fourier trigonométriques de g sont notés a_n ($n \in \mathbb{N}$) et b_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Rappeler les expressions de a_n et b_n et étudier la convergence de la série de Fourier de g (on donnera l'énoncé complet du théorème utilisé).

26. Déterminer b_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

27. Démontrer que g est π-périodique et que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

28. Démontrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 2(-1)^k g_{2k}(x)$.

29. Démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos t}) = g_0(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n g_{2n}(x)\cos(2nt)$$

E3A 2014 – MP – Maths A
Corrigé

Partie I

1. Classiquement, les solutions à valeurs réelles (respectivement complexes) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$, où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ (respectivement $Ce^{ix} + De^{-ix}$, où $(C,D) \in \mathbb{C}^2$).
2. On a immédiatement $\quad A\cos x + B\sin x = A + Bx + o(x) \quad$ au voisinage de 0.
3. On en déduit que, si $A \neq 0$, alors $\quad \dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{A}{\sqrt{x}} \quad$ en 0^+, et donc a en 0^+ une limite infinie.

   Si, par contre, $A = 0$, alors $\quad \dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} = B\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \quad$ en 0^+, donc a pour limite 0 en 0^+. La condition demandée est donc $\quad A = 0$.
   Si $A = 0$ et $B \neq 0$, le développement asymptotique précédent donne $B\sqrt{x}$ comme équivalent en 0^+ ; si $B = 0$, la fonction est la fonction nulle.

Partie II

4. L'équation $(E_{1/2})$ est linéaire et homogène, l'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel. De plus, c'est une équation du second ordre, et le coefficient x^2 de y'' ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, l'espace des solutions est donc de dimension 2.
5. Pour tout $x > 0$, on a $y(x) = x^{-1/2}z(x)$, donc $y'(x) = -\dfrac{x^{-3/2}}{2}z(x) + x^{-1/2}z'(x) \quad$ puis

$$y''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{4}\, z(x) - x^{-3/2}z'(x) + x^{-1/2}z''(x)$$

   En substituant dans $(E_{1/2})$, on obtient après calculs

$$y \text{ est solution de } (E_{1/2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x > 0 \quad x^{3/2}z''(x) + x^{3/2}z(x) = 0$$

   Puisqu'on travaille sur $]0,+\infty[$, on peut simplifier par $x^{3/2}$; l'équation cherchée est donc l'équation $z'' + z = 0$ étudiée en **I**.
6. Compte tenu de **6.** et **1.**, les solutions (à valeurs réelles) de $(E_{1/2})$ sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} \quad$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
7. D'après **3.**, les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Bx^{-1/2}\sin x$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \longmapsto x^{-1/2}\sin x$.
8. Une fonction vérifiant la condition posée aurait pour limite 0 en 0, donc doit vérifier $A = 0$; le **3.** montre alors que la seule solution est la fonction obtenue en prenant $A = 0$ et $B = \sqrt{2/\pi}$.

Partie III

9. On a immédiatement $\quad \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
   D'autre part, si $0 < a < b$, alors $\quad \int_a^b t^x e^{-t}\, dt = [-t^x e^{-t}]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\, dt \quad$ par intégration par parties. En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on en déduit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
10. **a.** Par exemple, R est la borne supérieure de l'ensemble des $t \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels la série $\sum a_n t^n$ converge (ou pour lesquels $(a_n t^n)$ tend vers 0, ou est bornée,...).

b. Puisque S est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} & x \sum_{n \geqslant 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + (2\alpha+1) \sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = 0 \\ \iff & \sum_{p \geqslant 1} p(p+1) a_{p+1} x^p + (2\alpha+1) \sum_{p \geqslant 0} (p+1) a_{p+1} x^p + \sum_{p \geqslant 1} a_{p-1} x^p = 0 \\ \iff & a_1 + \sum_{p \geqslant 1} \big[(p+1)(p+2\alpha+1) a_{p+1} + a_{p-1} \big] x^p = 0 \end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la deuxième, on a posé $p = n-1$ dans les deux premières sommes, $p = n+1$ dans la dernière.
L'égalité étant vérifiée sur $]-R, R[$, l'unicité du développement en série entière montre que les coefficients de la série entière du membre de gauche de la dernière équation, sont tous nuls ; ce qui fournit les relations demandées par l'énoncé.

11. a. Puisque $\alpha \geqslant 0$ par hypothèse, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_{2p+1} = \dfrac{-a_{2p-1}}{(2p+1)(2p+1+2\alpha)}$; puisque $a_1 = 0$, une récurrence immédiate montre que les coefficients d'indice impair sont tous nuls.

b. On a de même, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad a_{2p+2} = \dfrac{-a_{2p}}{4(p+1)(p+1+\alpha)}$.
Si $a_0 = 0$, les coefficients d'ordre pair sont eux aussi tous nuls, la série est la série nulle et son rayon de convergence est infini.
Si $a_0 \neq 0$, il est clair que $a_{2n} \neq 0$ pour tout n. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\left| \frac{a_{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{a_{2n} z^{2n}} \right| = \frac{|z|^2}{4(n+1)(n+1+\alpha)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc, par la règle de d'Alembert, la série $\sum a_{2n} z^{2n}$ converge absolument. Ceci étant vrai pour tout z, le rayon de convergence R est donc infini.

c. Le résultat est vrai pour $n = 0$; le résultat général s'en déduit par récurrence, en utilisant la relation de récurrence donnée en **b.** et la relation $\quad \Gamma(n+\alpha+2) = (n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)$.

12. La théorie n'a pas substantiellement évolué depuis la résolution de la question **4.** : c'est toujours un plan vectoriel.

13. Le raisonnement est strictement analogue à celui de la question **5.** ; on remplace y par $x^\alpha z$ dans l'équation (E_α), et après simplification par $x^{\alpha+1}$ (légitime puisqu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient l'équation (E'_α).

14. Soit (a_n) la suite définie par les conditions du **10.b** et $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $T(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_{2n} x^{2n}$.

La question **11.** montre que T est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et la question **10.** qu'elle y est solution de l'équation (E'_α).
Enfin, la question **11.c** montre que $T(x) = x^{-\alpha} f_\alpha(x)$ pour tout $x > 0$; d'après **13.**, la fonction f_α est donc solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

15. Avec les notations précédentes, la fonction T, somme d'une série entière, a pour limite $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$ en 0 ; puisque $a_0 \neq 0$, on en déduit

$$f_\alpha(x) = x^\alpha T(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{x^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$$

16. Soient $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Le changement d'indice $q = n+1$ donne

$$f_{p+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{-(-1)^q}{(q-1)!(q+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2q+p-1}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \\
&= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}
\end{aligned}$$

D'autre part : $\quad f_p'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$ (le facteur $1/2$ vient de la dérivation de $x/2$).

On a donc finalement $\quad f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = 2f_p'(x)$.

Partie IV

17. Pour $(t,x) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$, on pose $h(t,x) = \cos(pt - x\sin t)$. Alors :

- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $h(\cdot,x_0) : t \longmapsto h(t,x_0)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$;
- pour tout $t_0 \in [0,\pi]$, la fonction $h(t_0,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(\cdot,x_0) : t \longmapsto \sin t \sin(pt - x\sin t)$ est continue, donc intégrable, sur $[0,\pi]$;
- pour tout $(t,x) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,\pi]$.

Le facteur $1/\pi$ ne changeant rien au problème, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que g_p est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_p'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t \sin(pt - x\sin t)\,dt$$

On montre de même que g_p' est de classe C^1, donc que g_p est de classe C^2, et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_p''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t \cos(pt - x\sin t)\,dt$$

18. Soit $p \in \mathbb{N}$. On vérifie facilement que $g_p(0) = 0$, donc que g_p vérifie (E_p) en $x = 0$. Pour $x \neq 0$, effectuons donc une intégration par parties dans $g_p'(x)$, en primitivant le facteur $\sin t$ et en ayant soin de ne pas fixer la valeur de la constante d'intégration :

$$\begin{aligned}
\pi g_p'(x) &= [(C - \cos t)\sin(pt - x\sin t)]_{t=0}^{\pi} + \int_0^\pi (\cos t - C)(p - x\cos t)\cos(pt - x\sin t)\,dt \\
&= x\int_0^\pi (\cos t - C)\left(\frac{p}{x} - \cos t\right)\cos(pt - x\sin t)\,dt
\end{aligned}$$

En prenant maintenant $C = -p/x$, on obtient

$$\begin{aligned}
\pi g_p'(x) &= \frac{p^2}{x}\int_0^\pi \cos(pt - x\sin t)\,dt - x\int_0^\pi \cos^2 t \cos(pt - x\sin t)\,dt \\
&= \frac{\pi p^2}{x} g_p(x) - x\int_0^\pi \cos(pt - x\sin t)\,dt + x\int_0^\pi \sin^2 t\cos(pt - x\sin t)\,dt \\
&= \frac{\pi}{x}\left(p^2 g_p(x) - x^2 g_p(x) - x^2 g_p''(x)\right)
\end{aligned}$$

et donc g_p est solution de (E_p).

19. **a.** Soit $n \geqslant 2$. On effectue une intégration parties :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_0^\pi \sin t \sin^{n-1} t\, dt = [-\cos t \sin^{n-1} t]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \cos^2 t \sin^{n-2} t\, dt \\ &= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} t\, dt - (n-1)\int_0^\pi \sin^n t\, dt \end{aligned}$$

d'où l'on tire immédiatement la relation cherchée.

b. On en déduit, pour tout $n \geqslant 1$:

$$w_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,w_0 = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

ce qui se justifie évidemment par une récurrence simple.

20. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\pi]$. On a $\cos(t - x\sin t) = \cos t\cos(x\sin t) + \sin t \sin(x\sin t)$. Le changement de variable $u = \pi - t$ donne

$$\int_0^\pi \cos t \cos(x\sin t)\, dt = -\int_\pi^0 (-\cos u)\cos(x\sin u)\, du = -\int_0^\pi \cos u\cos(x\sin u)\, du$$

et donc cette intégrale et nulle, ce qui fournit l'expression demandée pour g_1.

D'autre part, $\pi g_0(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin t)\, dt$, et on sait que $\cos(x\sin t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$. Posons $f_k(t) = \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$ pour tout $t \in [0,\pi]$.

Les fonctions f_k sont continues par morceaux donc intégrables sur $[0,\pi]$ et la série $\sum f_k$ converge simplement sur $[0,\pi]$, de somme $\cos(x\sin t)$ continue sur $[0,\pi]$. Enfin, on a clairement $|f_k(t)| \leqslant \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout k et tout t, d'où, pour tout k, $\int_0^\pi |f_k(t)|\, dt \leqslant \frac{\pi x^{2k}}{(2k)!}$; donc la série $\sum \int_0^\pi |f_k(t)|\, dt$ converge.

On sait qu'alors on peut intervertir intégrale et somme ; autrement dit,

$$\pi g_0(x) = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^\pi f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^\pi \sin^{2k} t\, dt\Big]x^{2k}$$

La question **19.b** donne alors $\quad g_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}x^{2k} \quad$ qui constitue le développement cherché.

On montre de même, à partir de la formule établie au début de cette question, que

$$\pi g_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^\pi \sin^{2k+2} t\, dt\Big]x^{2k+1}$$

En utilisant de nouveau **19.b**, on obtient alors $\quad g_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!}x^{2k+1}$.

21. Il suffit de comparer les développements en série entière obtenus à la question précédente, à ceux qui ont été donnés en fin de partie **III** pour les fonctions f_p.

22. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$. Avec $a = pt - x\sin t$ et $b = t$, cela fournit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(pt - x\sin t)\sin t\, dt = 2g_p'(x)$$

23. L'égalité a déjà été vérifiée aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie jusqu'à un rang $p \geqslant 1$, alors $g_{p+1} = g_{p-1} - 2g_p' = f_{p-1} - 2f_p'$ par hypothèse de récurrence ; la question **16.** montre alors que $g_{p+1} = f_{p+1}$, ce qui achève la récurrence.

Partie V

24. La valeur de $g(t)$ ne dépend en fait que de $\cos t$, g est donc clairement 2π-périodique.

25. On a $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)g(t)\,dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)g(t)\,dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a en fait $g(t) = \cos(x\cos t)$ pour tout t. Les théorèmes usuels montrent donc que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, ce qui suffit pour que sa série de Fourier converge vers g uniformément sur $\mathbb{R}$.

26. Puisque $g(t)$ ne dépend que de $\cos t$, g est paire ; on sait qu'alors ses coefficients b_n sont tous nuls.

27. Soit $t \in \mathbb{R}$; alors $x\cos(t+\pi) = -x\cos t$; par suite $\exp(ix\cos t)$ et $\exp\big(ix\cos(t+\pi)\big)$ sont conjugués, donc ont même partie réelle. On a bien $g(t+\pi) = g(t)$, g est π-périodique.
Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Le changement de variable $t = u + \pi$ donne

$$\int_\pi^{2\pi}\cos\big((2k+1)t\big)g(t)\,dt = \int_0^\pi \cos\big((2k+1)u + (2k+1)\pi\big)g(u+\pi)\,du = -\int_0^\pi \cos\big((2k+1)u\big)g(u)\,du$$

et donc $\int_0^{2\pi}\cos\big((2k+1)t\big)g(t)\,dt = 0$, ce qui donne $a_{2k+1} = 0$.

28. Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Commençons par noter que

$$\pi g_{2k}(x) = \int_0^\pi \cos(2kt)\cos(x\sin t)\,dt + \int_0^\pi \sin(2kt)\sin(x\sin t)\,dt$$

Comme à la question **20.**, le changement $u = \pi - t$ permet de montrer que la deuxième intégrale est nulle.
D'autre part, la fonction figurant dans la première intégrale est π-périodique ; on a donc

$$\pi g_{2k}(x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kt)\cos(x\sin t)\,dt$$

Posons enfin $t = u + \pi/2$ dans cette intégrale :

$$\pi g_{2k}(x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos(2ku + k\pi)\cos\left[x\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]dt = \frac{(-1)^k}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2ku)\cos(x\cos u)\,du$$

le dernier changement de bornes étant justifié par la 2π-périodicité de la fonction intégrée. Cela fournit bien $a_{2k} = 2(-1)^k g_{2k}(x)$.

29. Compte tenu des questions **26.** à **28.**, le résultat demandé exprime simplement le fait que g est la somme de sa série de Fourier.