My Ismail Mamouni
http ://myismail.net
مموني مولاي اسماعيل

PRÉPAS ELBILIA

Prépas MP

Contrôle

Suites et Séries de fonctions

Durée : 2 heures

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.
3. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$
   6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.
   6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt.$
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$
9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

On note f la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2 - 1}$.

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^{2k} \ln t \, \mathrm{d}t$.

Q2. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$, puis démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}$.

On pourra utiliser librement que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3

On note ζ la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \dfrac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} .$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.

Q14. Un premier lien avec l'arithmétique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de l'entier n. On pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et on prend $x > 1$. Justifier que la famille $\left(\dfrac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est sommable et que sa somme vaut $\zeta(x)^2$. En déduire que :

$$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x} .$$

On pourra considérer la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ où $A_n = \{(a,b) \in A\ ,\ ab = n\}$.

FIN

1 Exercice I Un corrigé E3A MP 2021 Mathématiques

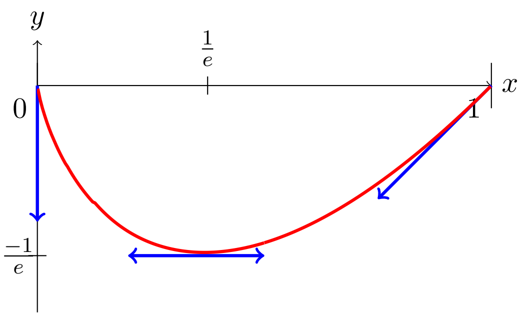
1. $f : x \mapsto e^{-x\ln(x)}$ est continue sur $]0,1]$ comme produit et composition de fonctions continues et, pour $n > 0$, les f_n sont continues sur $]0,1]$ comme produit de fonctions continues.
De plus, d'après les croissances comparées, pour $n > 0$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x\ln(x)} = 1 = f(0) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n = 0 = f_n(0)$$
Donc f et les f_n pour $n > 0$ sont continues en 0. Enfin, f_0 est constante donc continue donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } I}$.

2. Notons que, $\forall x \in I\backslash\{0\}, \sum f_n(x) = \sum \dfrac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ est la série entière de l'exponentielle en $-x\ln(x)$.
Comme l'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $\sum f_n(x)$ est convergente et
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = e^{-x\ln(x)} = f(x)$.
Si $x = 0$, $\sum f_n(0)$ converge car $f_n(0) = 0$ si $n > 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = f_0(0) = 1 = f(0)$.
Donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ et } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f \text{ sur } I}$.

3. φ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et $\varphi'(t) = \ln(t) + 1$ donc $\varphi'(t) \leq 0$ si $t \in \left]0, \frac{1}{e}\right]$ et $\varphi'(t) \geq 0$ si $t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

4. $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \varphi'(t) = -\infty$ donc la tangente en 0 est d'équation $x = 0$ et $\varphi'(1) = 1$ donc la tangente en 1 est d'équation $y = x - 1$. d'où le graphique :



5. Comme f_n s'annule en 0, que sur $]0,1]$ $f_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\varphi^n$ et que d'après la question 3., $\mathcal{N}_\infty(\varphi) = \dfrac{1}{e}$ alors $\mathcal{N}_\infty(f_n) = \dfrac{1}{n!e^n}$.

Or $\sum \frac{1}{n!e^n}$ converge car c'est la série entière de l'exponentielle en $\frac{1}{e}$ donc $\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } I}$.

6. 1. Notons $g_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.
   - g_x est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et composition de fonctions fonctions continues par morceaux.
   - $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g_x(t) = 0$ par croissances comparées donc $g_x(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et comme, d'après les intégrales de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ alors, d'après le théorème de comparaison, g_x est intégrable en $+\infty$.
   - $g_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et, d'après les intégrales de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$. Donc, d'après le théorème de comparaison, g_x est intégrable en 0^+ si et seulement si $x > 0$.

   Donc $\boxed{\Gamma \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

   6.2 Posons $\mathcal{P}_n : \Gamma(n+1) = n!$.
   - $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Supposons $\mathcal{P}_n$ vrai. En procédant par intégration par parties (les fonctions concernées sont de classe $\mathcal{C}^1$), pour $x > 0$

$$\left\{\begin{array}{l} u = t^{n+1} \\ v' = e^{-t} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u' = (n+1)t^n \\ v = -e^{-t} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \int_0^x t^{n+1}e^{-t}dt &= \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt \\ &= -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)\int_0^x t^n e^{-t}dt \end{aligned}$$

   En faisant tendre x vers $+\infty$, d'après les croissances comparées et en utilisant $\mathcal{P}_n$, on obtient $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$ donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Donc, par récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!}$.

7. Avec le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} u = -\ln(t) \\ du = -\frac{dt}{t} \end{array}\right.$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1 t^{n+1}\ln^n(t)\left(-\frac{dt}{t}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_{+\infty}^0 e^{-(n+1)u}(-u)^n du \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du \end{aligned}$$

   Avec le changement de variable $\left\{\begin{array}{l} v = (n+1)u \\ dv = (n+1)du \end{array}\right.$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, on obtient :

$$\int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}du = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \frac{v^n}{(n+1)^n}e^{-v}\frac{dv}{n+1} = \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

   Donc d'après la question précédente, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$.

8. — D'après la question 1., les f_n sont continues donc continues par morceaux sur le segment $[0,1]$ donc intégrables sur I.

— D'après la question 2., $\sum f_n$ converge simplement vers f qui, d'après la question 1, est continue donc continue par morceaux sur I.

— d'après la question 7, si $n \in N^*$, $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 f_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et $\displaystyle\int_0^1 |f_0(t)|dt = \int_0^1 1dt = 1 = 1^{-1}$. Donc $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 n^{-n} = 0$ donc $n^{-n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme, d'après les séries de Riemann, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente alors, d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(t)|dt = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$ l'est aussi.

Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur I et

$\boxed{J = \displaystyle\int_0^1 f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}}$.

9. Notons que $\forall n > n_0$, $0 \leq n^{-n} \leq (n_0+1)^{-n}$ donc, d'après la somme d'une série géométrique,

$$0 \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} n^{-n} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty}(n_0+1)^{-n} = (n_0+1)^{-(n_0+1)}\frac{1}{1-\frac{1}{n_0+1}} = \frac{1}{(n_0+1)^{n_0} n_0}$$

Avec $n_0 = 9$, le reste est inférieur à 9.10^{-9} donc à 10^{-6} donc

$\boxed{\text{la somme partielle d'ordre 9 est une valeur approchée à } 10^{-6} \text{ de } J}$.

Avec la calculette on trouve $n_0 = 7$ est le plus petit n_0 possible, mais elle n'était pas autorisée ici.

CCINP Mathématiques 1 MP 2021 : un corrigé

Exercice 2

Jérémy Larochette – Lycée Carnot – Dijon

Q1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : t \in]0,1] \mapsto t^{2k} \ln t$. C'est une fonction continue sur $]0,1]$ et $|f_k(t)| \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $t^{2k+1/2}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ par croissances comparées.

Or $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1]$ (intégrale de Riemann avec $\frac{1}{2} < 1$), donc par comparaison de fonction positives, $\boxed{f_k \text{ est intégrable sur }]0,1].}$

Puis, par intégration par parties, avec $\varepsilon > 0$, $t \mapsto \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$ et ln étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$,

$$\int_\varepsilon^1 t^{2k} \ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2k+1}\int_\varepsilon^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = -\frac{\varepsilon^{2k+1}\ln\varepsilon}{2k+1} - \frac{1}{(2k+1)^2}\left(1-\varepsilon^{2k+1}\right).$$

Donc, en faisant tendre ε vers 0 et par croissances comparées, $\boxed{\int_0^1 t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(2k+1)^2}.}$

Q2. f est continue et positive sur $]0,1[$ et, de nouveau, $f(t) \underset{t\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ car $\sqrt{t}f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc par comparaison de fonctions positives, f est intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.
Puis $f(t) = \frac{\ln(1+(t-1))}{(t+1)(t-1)} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{t-1}{2(t-1)} = \frac{1}{2}$ donc $f(t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} \frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 1 donc intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$.
Finalement, $\boxed{f \text{ est intégrable sur }]0,1[.}$

Puis, pour $t \in]0,1[$, $t^2 \in]-1,1[$ donc $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}$, d'où $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\ln t\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,\mathrm{d}t$.

Justifions l'interversion série intégrale par le théorème de convergence N_1 :

H1. La série de fonction $\sum f_k$ converge simplement vers $-f$ qui est continue sur $]0,1[$.

H2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est intégrable sur $]0,1[$ d'après la question **Q1** car négative et d'intégrale convergente.

H3. Avec **Q1**, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k^2}$ avec $\sum \frac{1}{k^2}$ convergente en tant que série de Riemann avec $2 > 1$, donc par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \int_0^1 |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On a alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (qui est positif, ce qui est rassurant).

Or, si $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n^2}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et finalement $\boxed{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}.}$

Exercice 2

Partie II

Q9. Soit $a > 1$ et $\gamma \in]1, a[$. Comme $0 \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ car, par croissances comparées, $\dfrac{\ln n}{n^{a-\gamma}} \to 0$, et comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^\gamma}$ converge, par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\boxed{\sum \dfrac{\ln n}{n^a} \text{ converge.}}$

Q10. **H1.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-x \ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, et $f_n' : x \mapsto -\dfrac{\ln n}{n^x}$.

H2. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ comme série de Riemann convergente.

H3. Soit $a > 1$. Pour tout $x \geqslant a$, $|f_n'(x)| = \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant \dfrac{\ln n}{n^a}$ qui est un terme général de série convergente d'après la question précédente, indépendant de x.
Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Ainsi, par théorème de transfert de classe $\mathcal{C}^1$, $\boxed{\zeta \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1, +\infty[}$ et $\zeta' : x \mapsto -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^x} \leqslant 0$ donc $\boxed{\zeta \text{ décroît.}}$

Q11. Si $\sum f_n$ convergeait uniformément sur $]1,+\infty[$, le théorème de la double limite s'appliquerait au voisinage de 1 et en particulier $\sum \lim\limits_{1^+} f_n = \sum \frac{1}{n}$ convergerait ce qui est contradictoire.

$\boxed{\sum f_n \text{ ne converge pas uniformément sur }]1,+\infty[.}$

Q12. Par contre $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur tout $[2,+\infty[$ car si $x \geqslant 2$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^2}$ terme général de série convergente indépendant de x.

Le théorème de la double limite peut donc s'appliquer, avec $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \delta_{n,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$\boxed{\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{n,1} = 1.}$$

Q13. Soit $x > 1$. $g_x : t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui permet de faire une comparaison série intégrale. Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ l'intégrale de Riemann $I(x)$ étant bien convergente avec $x > 1$, $\boxed{I(x) \leqslant \zeta(x) \leqslant I(x)+1.}$

Or $I(x) = \left[\frac{1}{(-x+1)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}$, donc $\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant \frac{1}{x-1} + 1$ et $1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant 1 + (x-1)$ donc $(x-1)\zeta(x) \xrightarrow[x\to1]{} 1$ par encadrement et enfin $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$

Q14. Il y a une imprécision dans l'énoncé : d_n désigne manifestement le nombre de diviseurs **positifs** de n.

$\left(\frac{1}{(ab)^x}\right)_{(a,b)\in A} = \left(\frac{1}{a^x} \times \frac{1}{b^x}\right)_{(a,b)\in A}$ est une « suite double produit » $\boxed{\text{sommable}}$ car les séries $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{a^x}$ et $\sum\limits_{b\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{b^x}$ sont absolument convergentes (les termes sont positifs) de somme le produit des sommes, c'est-à-dire $\boxed{\text{de somme } \zeta(x)^2.}$ En effet, les termes sont positifs, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{b\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(ab)^x}$ converge vers $\frac{\zeta(b)}{a^x}$ et $\sum\limits_{a\in\mathbb{N}^*} \frac{\zeta(x)}{a^x}$ converge vers $\zeta(x)^2$.

On pose $A_n = \{(a,b) \in A,\ ab = n\}$, et alors $\boxed{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*}$ et les $\boxed{A_n \text{ sont deux à deux disjoints.}}$

Donc, par sommabilité et théorème de sommation par paquet, on peut écrire, la série étant convergente

$$\sum_{(a,b)\in A} \frac{1}{(ab)^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{(ab)^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(a,b)\in A_n} \frac{1}{n^x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|A_n|}{n^x}.$$

Or $|A_n| = |\{(a,b) \in \mathbb{N}_*^2,\ n = ab\}| = \left| \left\{ \left(a, \frac{n}{a}\right) \text{ avec } a \text{ diviseur positif de } n \right\} \right| = d_n$.

Finalement, $\boxed{\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{n^x}.}$