Prépas MP

My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits CCINP

Planche 1

Énoncé exercice 66 8 points

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

12 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 4^{n+1} n!$.

2. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Montrer que f est solution de $f' = f^2$ sur un intervalle à préciser.

3. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

4. Donner l'expression de (u_n) en fonction de n.

Planche 2

Énoncé exercice 74 8 points

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

12 points

On pose $c_0 = 0,\ c_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \cdot c_{n-k}$.

On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ et on note $R > 0$ son rayon de convergence.

1. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f^2(x) = f(x) - x$. Déterminer $f(0)$.

2. Montrer qu'au voisinage de 0 $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. Préciser R.

3. Développer $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1,\ c_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}.$$

Planche 3

Énoncé exercice 84 **8 points**

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

12 points

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t$. Calculer u_0.
3. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (u_n), puis exprimer u_n à l'aide de factorielles.
4. Sur $[0, +\infty[$, on pose $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}$ et 0 sinon. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} f_n = \sqrt{n} u_n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$.

Planche 4

Énoncé exercice 108 **8 points**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i) \cap (Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

12 points

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on pose

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy}$$

On pose aussi $f(0,0) = \alpha$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

2. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et trouver α pour que f soit continue.

On suppose désormais $\alpha = 0$.

3. Justifier l'existe et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Justifier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ et en donner la valeur.

4. f est-elle de classe C^1?

Planche 5

Énoncé exercice 108 **8 points**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall\,(i, j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

12 points

On considère une urne qui contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue un tirage avec remise de la boule dans l'urne. Lorsqu'on tire une boule blanche, on rajoute une boule blanche en plus dans l'urne et de même si on tire une boule rouge, on rajoute une boule rouge en plus.

On note :

- X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on tire une boule blanche au n-iéme tirage et 0 sinon.
- Y_n la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches au n-iéme tirage dans l'urne.

1) Calculer $P(Y_n = 1)$ et $P(Y_n = n+1)$.

2) Montrer par récurrence que Y_n suit une loi uniforme.

3) En déduire la loi de X_n.