

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Partie 2 : l'orthogonalité

2.1 : le sev orthogonal

Exo
1

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni du produit scalaire : $(f | g) = \int_0^1 fg(t) dt$, et

$F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 0\}$

1) . Montrer que $F^\perp = \{0\}$. *Indication* : $xf \in F, \forall f \in E$.

2) En déduire que $F + F^\perp \neq E$

Exo
2

Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E . Démontrer les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.

2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

3. $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$;

4. $\text{vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.

5. On suppose de plus que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Exo
3

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E . Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exo
4

$\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire défini à l'exercice (1)

Montrer qu'il existe une base orthonormée (P_0, \dots, P_n) de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\deg P_k = k$.

Exo
5

Soit E un espace préhilbertien, et (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs de E de norme 1 tels que, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2.$$

Démontrer que E est de dimension n et que (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de E .

Exo
6

On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.

3. Déterminer F^\perp .

2.2 : les projecteurs orthogonaux

Exo 7 Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ à ce plan.

Exo 8 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

Exo 9 Soient E un espace vectoriel euclidien, et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre :

1. $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$;
2. Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exo 10 Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symtries orthogonales de bases F et G .

Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

Exo 11 Soient F, G deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G . Montrer que $p_F + p_G - p_{F \cap G} = \text{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F \cap G}$.

Exo 12 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .
2. Déterminer la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .

Exo 13 Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E .

Montrer que : $p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$.

Exo 14 Soit u un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée \mathcal{B} .

Montrer que $U^t U$ est la matrice dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u)$.

2.3 : Distance à un sev

Exo
15

Dans \mathbb{R}^5 muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Exo
16

Déterminer F^\perp , puis la matrice de la projection orthogonale sur F .

Dans \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique, soit P le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Soit $u = (a, b, c, d)$ un vecteur de \mathbb{R}^4 . Déterminer en fonction de a, b, c et d la distance de u à P .

Exo
17

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ S = (s_{ij}) \longmapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} - s_{ij})^2 \end{cases}$.

Déterminer le minimum de f_A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et la matrice S réalisant ce minimum.

Exo
18

Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d)^2 dx$ soit minimum, et calculer ce minimum.

Exo
19

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^n b_i X^i$, $\langle P | Q \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i$.

Soit $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. Trouver une base orthonormale de H , puis calculer $d(X, H)$.

Exo
20

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $\min_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ et déterminer les X

réalisant ce minimum ($\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique dans \mathbb{R}^4).

Exo
21

On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire canonique.

- Déterminer la projection orthogonale sur H d'équation $x - 2y + z = 0$.
- Calculer la distance de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ au plan H .

Exo
22

Dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3, 4, 5)$ au plan \mathcal{P} d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

Exo
23

Calculer $\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exo
24

. Calcul de minimums.

Justifier l'existence des minimums des fonctions réelles suivantes et préciser comment les calculer.

1) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(a, b) \mapsto \int_0^\pi (\sin x - ax^2 - bx)^2 dx.$

Réponse : $a = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}, b = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2}, \min = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5}.$

2) $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^1 (1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 dt$

Réponse : $\min = \frac{1}{16}.$

3) $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 dt$

Réponse : $\frac{1}{4}.$

Exo
25

On pose $E = C^1([0; 1], \mathbb{R})$ et $\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$

- (a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
 (b) On pose $V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E \mid f \text{ est } C^2 \text{ et } f'' = f\}.$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.

Exprimer la projection orthogonale sur W .

- (c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}.$

Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt.$

Exo
26

On définit une application $\varphi: \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- (a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 (b) Calculer $\varphi(X^p, X^q).$
 (c) Déterminer

$$\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 dt.$$

