EXERCICES : ESPACES PRÉHILBERTIENS

Partie 1 : Généralités

I.1 : Produit Scalaire & Normes

Exo 1

Les couples (E,φ) suivants sont-ils des espaces euclidiens ?

1. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,Q)=\sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i)\,Q(a_i)$ où les a_i sont $n+1$ réels distincts..
2. $E=\mathbb{R}^2$, $\varphi\big((x,y),(x',y')\big)=axx'+bxy'+cx'y+dyy'$ (discuter selon a,b,c,d).

Exo 2

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$: $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid P(0)=P(1)=0\}$.

a) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; en donner une base et la dimension.

b) Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ défini par : $\varphi(P,Q)=-\int_0^1 (PQ''+P''Q)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exo 3

Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par :

$$\varphi(x,y)=\langle x\,|\,y\rangle+k\,\langle x\,|\,a\rangle\,\langle y\,|\,a\rangle\,.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exo 4

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f,g\rangle=f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$;
2. $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $w\in E$ satisfait $w>0$ sur $]a,b[$.

Exo 5

Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (\mathrm{X},\mathrm{Y}) & \longmapsto & \mathrm{X}^{\mathsf{T}}\mathrm{AY}\end{array}\right.$.

a) Montrer que φ est bilinéaire.

b) À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle symétrique ?

c) Exprimer $\varphi(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ en fonction des composantes de X et de Y.

d) À quelle condition nécessaire et suffisante, φ est-elle un produit scalaire ?

Exo 6

Dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires :

a) $\langle \mathrm{P}\mid\mathrm{Q}\rangle=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}(k)\mathrm{Q}(k)$.

b) $\langle \mathrm{P}\mid\mathrm{Q}\rangle=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{P}^{(k)}(a_k)\mathrm{Q}^{(k)}(a_k)$.

Exo 7

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel et x,y,z,t des éléments de E.

1. Démontrer que $\|x-y\|+\|z-t\|\leq\|x-z\|+\|y-t\|+\|x-t\|+\|y-z\|$.

$$\|x\|+\|y\|\leq\|x+y\|+\|x-y\|.$$

2. En déduire que $(\|x\|+\|y\|)^2\leq\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$.

3. Démontrer que , $2+\|x+y\|^2\leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right)$.

I.2 : Inégalité de Cauchy Scwhartz

Exo 8

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $(x,y)\in E^2$.

1. Développer :

$$\left\|\|y\|^2 x-\langle x,y\rangle\, y\right\|^2.$$

2. Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exo 9

Pour $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(A^TB)$.

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A,B\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $(\operatorname{tr}(AB))^2\leq\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.
3. Montrer que : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(A)\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}$, et préciser les cas d'égalité.

Exo 10

1. Montrer que : $\forall f\in\mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R}),\ \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\geqslant\left(\frac{f(b)^2-f(a)^2}{2}\right)^2.$

2. Etudier le Cas d'égalité ?

Exo 11

Soient $x_1,\dots,x_n$ n réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n x_i=1$.

Montrer que $\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\geqslant n^2$. Cas d'égalité ?

Exo 12

Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2\leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$ et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $x_k>0$ pour chaque $k\in\{1,\dots,n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{x_k}\right)\geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exo 13

Démontrer que, pour tout $n\geq 0$, $\sum_{k=0}^n\sqrt{\binom{n}{k}}\leq 2^{n/2}\sqrt{n+1}$.

Exo 14

Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. Déterminer $\inf_{f\in E}\ \int_a^b f\times\int_a^b\frac{1}{f}$. Cette borne inférieure est-elle atteinte?

1. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2\leqslant 14$. Étudier le cas d'égalité.
2. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $2x^2+y^2+5z^2\leqslant 1$. Montrer que $(x+y+z)^2\leqslant 17/10$. Étudier le cas d'égalité.

Exo 15

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a $I_{m+n}^2\leqslant I_{2m}I_{2n}$.