Feuille d'exercices

Équations différentielles

Blague du jour :

• Dans la maison de retraite, deux grand-pères discutent : Mon cardiologue m'a dit que j'avais le cœur d'une personne de 30 ans... il m'a même dit où le gars était enterré.
• Un vieux dont les mains tremblent, assis sur un banc, voit un jeune homme en-casqué d'un Walkman s'asseoir près de lui et dont les mains tremblent aussi.
Le vieux : Parkinson ? Le jeune : Non, Michael Jackson.

Mathématicien du jour **Cauchy**
Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français Sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des séries et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques. Toute fois la négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux de Galois et d'Abel, perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

Remerciements : à Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces exercices.

1 Équations différentielles linéaires.

1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Exo 1

Résoudre les équations suivantes, étudier la possibilité de raccordements :

1) $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.

Indication: $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1+x}$.

2) $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.

Indication: $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{3\sin 2x - 6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

3) $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.

Indication: $y = \dfrac{\operatorname{argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$

$y = \dfrac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$

$y = \dfrac{-\operatorname{argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.

Exo 2

Résoudre les équations suivantes, étudier la possibilité de raccordements :

1) $(2+x)y' = 2-y$.

Indication: $y = 2 + \dfrac{\lambda}{x+2}$.

2) $xy' + y = \cos x$.

Indication: $y = \dfrac{C+\sin x}{x}$.

3) $x^3y' - x^2y = 1$.

Indication: $y = \lambda x - \dfrac{1}{3x^2}$.

4) $3xy' - 4y = x$.

Indication: $y = \lambda x^{4/3} - x$.

1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Exo 3

Équations d'Euler.
Ce sont les équations de la forme : $at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$ où a, b, c trois réels avec $a \neq 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit

1) On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}_+^*$. Poser $z(t) = y(e^t)$, montrer qu'on se ramène à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.

2) Dire comment résoudre E dans le cas où $I = \mathbb{R}_-^*$.

3) Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$$

Exo 4

Résoudre les équations suivantes :

1) $y''-y'-e^{2x}y=e^{3x}$ (poser $u=e^x$).
Indication: $y=-e^x+\lambda e^{e^x}+\mu e^{-e^x}$.

2) $y''-\left(6x+\dfrac{1}{x}\right)y'+8x^2y=x^4$ (poser $u=x^2$).
Indication: $y=\lambda e^{x^2}+\mu e^{2x^2}+\dfrac{2x^2+3}{16}$.

3) $x(1-2\ln x)y''+(1+2\ln x)y'-\dfrac{4}{x}y=0$ (chercher une solution de la forme $y=x^\alpha$).
Indication: $y=\lambda x^2+\mu\ln x$.

4) $x^2y''-2xy'+2y=2+2x^3\sin x$ (poser $u=\ln x$).
Indication: $y=ax+bx^2+1-2x\sin x$.

5) $x(x+1)y''-y'-2y=3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y=x^\alpha$).
Indication: $y=x^2\ln|x+1|+\lambda\left(x^2\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+x-\dfrac{1}{2}\right)+\mu x^2$.

6) $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ $\left(\text{poser } y=\dfrac{u}{x^2}\right)$.
Indication: $y=\dfrac{-1+a\mathrm{ch}x+b\mathrm{sh}x}{x^2}$.

7) $(x^2+3)y''+xy'-y=1$ (chercher les solutions polynomiales).
Indication: $y=\lambda\sqrt{x^2+3}+\mu x-1$.

Exo 5

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1) $4xy''-2y'+9x^2y=0$.
Indication: $2n(2n-3)a_n=-9a_{n-3}$

2) $xy''+2y'-xy=0$.
Indication: $n(n+1)a_n=a_{n-2}$

3) $4xy''+2y'-y=0$.
Indication: $(2n+1)(2n+2)a_{n+1}=a_n$.

4) $y''+xy'+3y=0$.
Indication: $n(n-1)a_n+(n+1)a_{n-2}=0$.

5) $x^2y''+6xy'+(6-x^2)y=-1$. *Indication:* $(n+2)(n+3)a_n=a_{n-2}$.

6) $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
Indication: $na_{n+1}=(n+1)a_n$.

Exo 6

Résoudre les équations suivantes :

1) $y''-2y'+2y=xe^x$.
Indication: $y=(x+a\cos x+b\sin x)e^x$.

2) $y''-4y'+4y=2(x-2)e^x$.
Indication: $y=(ax+b)e^{2x}+2xe^x$.

3) $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$.
Indication: $y=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+2\cos 2x+\sin 2x$.

4) $y''+y=\mathrm{cotan}x$.
Indication: $y=\sin x\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+\lambda\cos x+\mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).

5) $y''+3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
Indication: $y=(\lambda+\ln|x|)e^{-x}+\mu e^{-2x}$.

6) $y''+y=P(x)$ où P est un polynôme.
Indication: $y=\lambda\cos x+\mu\sin x+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nP^{(2n)}(x)$.

Exo 7

On considère l'équation différentielle :

$$(*)\quad y''+\frac{2y'}{\mathrm{th}x}+y=0.$$

1) On pose $z(x)=y'(x)+\dfrac{y(x)}{\mathrm{th}x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
Indication: $z'+\dfrac{z}{\mathrm{th}x}=0$.

2) Résoudre sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
Indication: $y=\dfrac{ax+b}{\mathrm{sh}x}$.

3) Parmi les solutions trouves, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}y_0(x)=1$.

4) Démontrer que y_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\dfrac{y_0'(x)}{\mathrm{th}x}$ admet une limite finie en 0.
En déduire que y_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

5) Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de y_0 et l'axe des abscisses est finie ?

Exo 8

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g : t \mapsto f'(t) + tf(t). \end{array}$

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.
Indication: spectre $= \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}$.

2) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2.
Indication: Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \iff f = af_\lambda + bf_{-\lambda}$.
Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \iff f(t) = (at+b)e^{-t^2/2}$.

3) Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2-1)y = 0$.
Indication: $\Phi^2(y) = -2y \iff y = e^{-t^2/2}\big(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\big)$.

Exo 9

On désigne par y la solution de l'équation différentielle $y'' + x\,y' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

1) Montrer que les drives de y vérifient $y^{(n)} + x\ y^{(n-1)} + (n-1)\ y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geq 2$.

2) Calculer par récurrence les drives successives de y en zéro.

3) Montrer que y admet le développement limité l'origine
$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ø(x^{2k+2}).$$

Exo 10

Lemme de Gronwall.
Soient f, g deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\ t \geq 0,\ g(t) \geq 0$ et $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$. Montrer : $\forall\ t \geq 0,\ f(t) \leq a\exp\Big(\int_0^t g(u)\,du\Big)$.
Indication: Considérer $h(t) = a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t) \leq g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel qui permet de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, scalaire : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

Exo 11

Équations de la forme $y'' + a(x)y = b(x)$. les questions sont indépendantes.

1) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geq 0$.
Montrer que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.
Indication: $f(x) = \int_{t=0}^x g(t)\sin(x-t)\,dt + \lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $g = f + f''$.

2) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geq f(x) + \frac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x : $f(x) \geq \frac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exo 12

Équations de la forme $y'' + a(x)y = b(x)$. les questions sont indépendantes.

1) Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

a) Soit y une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que y s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
Indication: la convexité de y.

b) Soit z une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien z s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.
Indication: la convexité de z.

2) Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ croissante strictement positive et y une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que y est bornée au voisinage de $+\infty$
Indication: on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$.

3) Soit $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0,+\infty[$
Indication: on commencera par prouver que si y_1, y_2 sont deux solutions alors le déterminant wronskien de y_1 et y_2 est constant.

4) **Zéros entrelacés :**
Soient r et q deux fonctions continues définies sur $I = [a,b]$ telles que : $\forall\ x \in I,\ r(x) \geq q(x)$. On considère les équations différentielles :
$$(E_1) :\ y'' + qy = 0, \qquad (E_2) :\ z'' + rz = 0.$$

a) Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ? *Indication:* On suppose $y \neq 0$ sinon y n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de y est isolé.

b) Soit z une solution de (E_2). On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.
Indication: $W' = (q-r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$.

c) Montrer que z a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.
Indication: Si z ne s'annule pas dans $]x_0, x_1[$ alors W' est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de W' et de $W(x_1) - W(x_0)$.

d) Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle y, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.
Indication: On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors u admet un zéro dans $]x_0, x_1[$ et en permutant les rôles de u et y, le prochain zéro éventuel de u vient après y_1. Sinon, $u = \frac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Exo 13

Équations de la forme $y" + a(x)y = b(x)$.

Soit $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x) \geq 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$.

1) Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.

Indication: $y = \displaystyle\int_{t=\alpha}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt + y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A' = a$ et $A(\alpha) = 0$.
Comme $a \geq 1$, on a $A(x) \geq x - \alpha$ et $A(t) - A(x) \leq t - x$ pour $t \leq x$.
On choisit z tel que $z \longrightarrow +\infty$ et $x - z \longrightarrow +\infty$.

2) On suppose $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = 0$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

Indication: l'intégrale $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$.

1.3 systèmes différentiels linéaires.

Exo 14

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}(t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1\\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t.\end{cases}$$

Indication: $y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Longrightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t$.
Résolution par DSE : $x = a(1 + t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

Exo 15

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x' = 2y + 2z\\ y' = -x + 2y + 2z\\ z' = -x + y + 3z.\end{cases}$

Indication: $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}$, $y = (\gamma t + \beta)e^{2t}$, $z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}$.

2) $\begin{cases}y' + y = z\\ z' + 2z = y - 1.\end{cases}$

Indication: $y = -1 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$, $z = -1 + \lambda(1+\alpha)e^{\alpha t} + \mu(1+\beta)e^{\beta t}$, $\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

Exo 16

x, y, z sont des fonctions de t. Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}y' = y + z + \sin t\\ z' = -y + 3z.\end{cases}$

Indication: $y = \dfrac{-3\cos t - 13\sin t}{25} + (at+b)e^{2t}$, $z = \dfrac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at + a + b)e^{2t}$.

2) $\begin{cases}x' = x + y - z\\ y' = 2x + y - 2z\\ z' = -2x + 2y + z.\end{cases}$

Indication: $x = (a + bt + ct^2)e^t$, $y = \left(a + \dfrac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t$, $z = \left(a - \dfrac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t$.

3) $\begin{cases}x' = 2x + y + z\\ y' = x - y - z\\ z' = -x + 2y + 2z.\end{cases}$

Indication: $x = -(b+c)e^t + (a+b+c)e^{2t}$,
$y = \dfrac{1}{2}(-a + 5b + 3c) - 2(b+c)e^t + \dfrac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
$z = \dfrac{1}{2}(a - 5b - 3c) + 3(b+c)e^t - \dfrac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.

4) $\begin{cases}x' = 2x + z + \operatorname{sh} t\\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t\\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t.\end{cases}$

Indication: $x = (at^2 + (a + b + \frac{1}{2})t + a + b + c)e^t$,
$y = (at^2 + (b - a + \frac{1}{2})t + a + c)e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$,
$z = (-at^2 + (a - b - \frac{1}{2})t - c)e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

2 Équations différentielles non linéaires.

Exo 17

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive et y la solution maximale définie sur $]\alpha,\beta[$ du problème de Cauchy : $y'=f(y)$, $y(x_0)=y_0$. Montrer que $\beta=x_0+\displaystyle\int_{t=y_0}^{+\infty}\frac{dt}{f(t)}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to beta^-}y(x)=+\infty$.

Exo 18

Équations variables séparables

1) $y'=y(1+y)$.
Indication: $y=-1+\dfrac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y=-1$.

2) $y'=\sin x\cos y$.
Indication: $y\equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x})-\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

3) $2yy'\sqrt{x}=\sqrt{y^2-1}$.
Indication: $y=\pm\sqrt{1+(\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y=\pm 1$.

4) $1+xy'=e^y$, condition initiale : $y(1)=1$.
Indication: $y=-\ln\big(1-x(1-1/e)\big)$.

5) $y'=\sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.
Indication: $y=\left(\lambda+\dfrac{x}{2}\right)\left|\lambda+\dfrac{x}{2}\right|$ ou $y=0$.

Exo 19

Équations homogènes

Ce sont les équations de la forme $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. On cherche la solution générale sous la forme $y(x)=x\lambda(x)$. Résoudre :

1) $y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$.
Indication: $y=\dfrac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda>0$.

2) $y'=\dfrac{x-y}{x+y}$.
Indication: $y=-x\pm\sqrt{2x^2-\lambda}$ ou $y=x(-1\pm\sqrt{2})$.

3) $(x^2+y^2)y'=2xy$.
Indication: $y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ ou $y=\pm x$ ou $y=0$.

4) $(x+y)y'=2x-y$.
Indication: $y=-x\pm\sqrt{\lambda+3x^2}$ et $y=x(-1\pm\sqrt{3})$.

Exo 20

Équations de Bernouilli

Elles sont de la forme : $y'=a(x)y+b(x)y^\alpha$, pour résoudre ce type déquation on utilise le changement de fonction : $z=y^{1-\alpha}$. on se raméne alors une équation linéaire du 1^{er} ordre. Résoudre :

1) $x^2y'+y+y^2=0$.

2) $y'+xy=x^3y^3$.

3) $xy'+y=xy^3$.
Indication: $y=\dfrac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2+2x}}$ ou $y=0$.

4) $2xy'+y=\dfrac{2x^2}{y^3}$.
Indication: $y=\pm\sqrt[4]{x^2+\dfrac{\lambda}{x^2}}$.

5) $\sqrt{x}y'-y+(x+2\sqrt{x})\sqrt{y}=0$.
Indication: $y=((\sqrt{x}+2)^2+\lambda e^{\sqrt{x}})^2$.

6) $xy'+y=(xy)^{3/2}$.
Indication: $y=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{\lambda-x}\right)^2$ ou $y=0$.

7) $x^3y'=y(3x^2+y^2)$.
Indication: $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}\,x^3}{\sqrt{2\lambda-x^4}}$ ou $y=0$.

Exo 21

Équations de Riccati

Elles sont de la forme : $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$; pour résoudre ce type déquation on utilise le changement de fonctions : $y=y_0+z$ où y_0 une solution particuliére à trouver, et on se raméne ainsi à une équation de Bernouilli. Résoudre :

1) $\left(1+x^3\right)y'=y^2+x^2y+2x$.

2) $y'+y^2-\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$.

3) $x^2(y'+y^2)=xy-1$.
Indication: $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x\ln|x|+\lambda x}$ ou $y=\dfrac{1}{x}$.

Exo 22

Étude qualitative.

Soit x la solution maximale du problème de Cauchy : $x'=\cos(t)+\cos(x)$, $x(0)=x_0\in]0,\pi[$.
Montrer que x est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\ t>0,\ 0<x(t)<\pi$.

Exo 23

Étude qualitative.

1) Justifier l'existence de y la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a > 0$, et $I =]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.
2) Montrer que y est strictement croissante au voisinage de 0.
   Indication: $y(0) > 0 \Longrightarrow y'(0) > 0$.
3) Montrer que y est strictement croissante sur $[0, \beta[$.
   Indication: Si $y' > 0$ sur $]0, \gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et reprendre le même raisonnement précédent.
4) Montrer que β est fini.
   Indication: $y' \geq y^3 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{y'}{y^3}$, puis intégrer.
5) En déduire que $\lim\limits_{x\beta^- \to y}(x) = +\infty$.

Exo 24

Étude qualitative.

1) Justifier l'existence des solutions maximales de l'équation $y' = x - e^y$. Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de validité d'une solution fixe y.
2) Montrer que y est décroissante puis croissante.
3) Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
4) Montrer que $\alpha \neq -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to \alpha^-} y(x) = \infty$.
   Indication: Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Longrightarrow -y'e^{-y} > 1$.

Exo 25

Étude qualitative.

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2,\ y(t_0) = y_0$. Soit y une solution maximale.

1) Montrer que $y = 0$ ou bien y ne s'annule pas.
2) On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de y.
   a) Montrer que si $y_0 \geq -2t_0$, alors y est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.
   b) Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, y et y' seraient bornes sur $]t_1, t_0]$.)
   c) Donner l'allure générale de la courbe de y.
   d) Résoudre l'équation en posant $z(t) = \dfrac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

Exo 26

Étude de l'quation $\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = \alpha \geq 0. \end{cases}$

1) Soit y la solution maximale. Justifier son existence et unicité, puis que $\dfrac{y'^2}{2} - \cos y = C = \alpha^2 - 1$.
2) a) Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que y est impaire.
3) On suppose ici que $C > 1$.
   a) Montrer qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $y(T) = 2\pi$.
   b) Montrer que : $\forall\ t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = y(t) + 2\pi$.
4) On suppose ici que $-1 < C < 1$: On pose $C = -\cos\theta$, et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{du}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}$.
   a) Soit a maximal tel que $y'(t) > 0$ sur $[0, a[$. Montrer que $y(a) = \theta$ et $F(\theta) = a$.
   b) Montrer que y est $4a$-périodique.
   c) Étudier les cas $C = 1$, $C = -1$.

Exo 27

Résolution approchée de $y' = f(y, t),\ y(a) = y_0$ sur $[a, b]$ par la méthode d'Euler.

Principe : On suppose que f est bornée par M et $|f(y, s) - f(z, t)| \leq K(|y - z| + |s - t|)$. On divise $[a, b]$ en n intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on approche la solution y par la fonction z, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0) = y_0 \\ \text{sur }]a_k, a_{k+1}[,\ z' = f(z(a_k), a_k). \end{cases}$$

1) Soit $\varepsilon_k = |z(a_k) - y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\ t \in [a_k, a_{k+1}],\quad |y(t) - z(t)| \leq kh^2(M+1) + (1 + Kh)\varepsilon_k \left(h = \dfrac{b-a}{n}\right)$.
2) En déduire que $\sup|y - z| \leq (M+1)(e^{K(b-a)} - 1)\dfrac{b-a}{n}$.