Feuille d'Exercices

Probabilités

Partie IV: Théorèmes de Convergence

Exercice 1:

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 2:

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR deux à deux indépendantes. On suppose que X_i suit une loi de Bernouilli de paramètre p_i. On souhaite démontrer que pour tout ε, $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right|<\varepsilon\right)=1$.

1. A quel résultat de cours cela vous fait-il penser ? Peut-on appliquer ici ce théorème ?
2. En vous inspirant de la démonstration du théorème cité dans la question précédente démontrer le résultat demandé.

Exercice 3:

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de VAR définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant une loi uniforme sur $[0;1]$. Pour $n \geqslant 1$ on définit :

$$M_n = \max(X_1,\cdots,X_n) \quad \text{et} \quad Y_n = n(1-M_n)$$

On rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $[M_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x]\cap[X_2 \leqslant x]\cap\cdots\cap[X_n \leqslant x]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de Y_n.
2. Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable remarquable.

Exercice 4:

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables de Poisson indépendantes de paramètre 1.
On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Exprimer $P(S_n \leqslant n)$ en fonction de n.
3. En utilisant le théorème de la limite centrée, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5:

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires indépendantes $Z_1,\cdots,Z_n$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre p ($p\in]0;1[$). On pose de plus $M_n = \dfrac{Z_1+\cdots+Z_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance m et l'écart type σ_n de M_n.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$.

Exercice 6:

Chaque année, M. Durand effectue deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une VAR X qui suit une loi d'espérance 45 min et d'écart-type 10 min. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes. Quelle est la probabilité pour que M. Durand passe au moins 350 h dans sa voiture au cours de l'année ? (On donne $\dfrac{21000 - 460 \times 45}{\sqrt{46000}} \approx 1,40$)

Exercice 7:

Un lot de N pots de confiture contient $0,2\%$ de pots avariés. On cherche à calculer la probabilité que, parmi 1000 pots, il y ait au plus 4 pots avariés ?

Pour cela on notera X la VAR aléatoire égale au nombre de pots avariés parmi 1000 pots, on reconnaitra une loi usuelle et on supposera N bien choisi pour pouvoir effectuer des approximations de loi

Exercice 8:

Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, malgré des contrôles, $0,6\%$ des jouets restent défectueux : un jouet sortant de l'entreprise a ainsi la probabilité $0,006$ d'être défectueux. On considère un lot de n jouets et parmi ceux-ci on appelle X_n le nombre de jouets défectueux.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
2. Pour $n = 500$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X_n ? En déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets défectueux.

Exercice 9:

Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure. Quel est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025.

On notera N le nombre de lignes installées dans l'entreprise, X la VAR égale au nombre d'employés qui téléphonent à une instant t fixé, et on commencera au départ par calculer la probabilité qu'un employé donné soit en train de téléphoner à une instant t.

On donne $\sqrt{27} \times 1,96 + 30 \approx 40,18$.

Exercice 10:

Un dé régulier est lancé 9 000 fois. On cherche à déterminer la probabilité de l'événement « on a obtenu 6 entre 1 400 et 1 600 fois ». On note X la VAR égale au nombre de 6 obtenus. On donne $\dfrac{100}{\sqrt{1250}} \approx 2,83$ et $\dfrac{100,5}{\sqrt{1250}} \approx 2,84$.

1. Quelle est la loi de X
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X.
3. Calculer la probabilité demandée dans l'énoncé de deux façon : avec correction de continuité et sans correction de continuité. Commenter les résultats obtenus.
4. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de la probabilité demandée. Commenter.

Correction

Exercice 1:

L'intégrale qui entre en jeu dans cette inégalité fait apparaitre une exponentielle qui nous fait penser à la densité de la loi normale centrée réduite.

Soit donc X une VAR qui suit la loi normale centrée réduite. On a alors $P(X \leqslant x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$.

Comme on a $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$ l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit :

$$\forall x > 0, \quad P(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x^2}$$

De plus on a $[|X| \geqslant x] = [X \geqslant x] \cup [X \leqslant -x]$ et comme cette union est incompatible :

$$P(|X| \geqslant x) = P(X \geqslant x) + P(X \leqslant -x) = 1 - \Phi(x) + \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) + 1 - \Phi(x) = 2(1 - P(X \leqslant x))$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\forall x > 0, \quad P(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow 2(1 - P(X \leqslant x)) \leqslant \frac{1}{x^2} \\
&\Leftrightarrow P(X \leqslant x) \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \geqslant 1 - \frac{1}{2x^2} \\
&\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt \geqslant \sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2:

1. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. On a alors $E(\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$. On s'intéresse donc dans cette question à $P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| < \varepsilon)$ ce qui nous fait penser à la loi faible des grand nombre. Mais ici on ne peut pas appliquer ce théorème car les X_i n'ont pas tous la même espérance.

2. Comme les X_i sont supposées indépendantes on a $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$.

   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \\
&\Rightarrow 1 - \frac{V(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \leqslant 1 - P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| \geqslant \varepsilon) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow 1 - \frac{V(\overline{X_n})}{\varepsilon^2} \leqslant P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| < \varepsilon) \leqslant 1
\end{aligned}$$

   Or on sait que $p_i(1 - p_i) \leqslant 1$ donc $V(\overline{X_n}) \leqslant \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = \dfrac{1}{n}$. Comme de plus $V(\overline{X_n}) \geqslant 0$ on a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V(\overline{X_n}) = 0$.

   On en déduit donc que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})| < \varepsilon) = 1$.

Exercice 3:

1. Notons F_i la fonction de répartition de X_i, G_n la fonction de répartition de M_n et H_n la fonction de répartition de Y_n.

   • Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, G_n(x) &= P(M_n \leqslant x) \\ &= P([X_1 \leqslant x] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant x]) \\ &= P(X_1 \leqslant x) \times \cdots \times P(X_n \leqslant x) \qquad \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= F_1(x) \times \cdots \times F_n(x)\end{aligned}$$

   Or on sait que les X_i suivent une loi uniforme sur $[0;1]$ donc : $F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   On a donc $G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   • On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(n(1-M_n) \leqslant x) = P\left(M_n \geqslant 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - G_n\left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

   Pour pouvoir exprimer proprement $H_n(x)$ en fonction de x, il nous faut calculer $G_n\left(1 - \frac{x}{n}\right)$. Pour cela nous devons distinguer plusieurs cas :

   • Si $1 - \frac{x}{n} < 0$: $\left(\Leftrightarrow 1 < \frac{x}{n} \Leftrightarrow n < x\right)$ on a $H_n(x) = 1 - 0 = 1$.

   • Si $0 \leqslant 1 - \frac{x}{n} \leqslant 1$: $\left(\Leftrightarrow -1 \leqslant -\frac{x}{n} \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant n\right)$ on a $H_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

   • Si $1 - \frac{x}{n} > 1$: $\left(\Leftrightarrow 0 > \frac{x}{n} \Leftrightarrow x < 0\right)$ on a $H_n(x) = 1 - 1 = 0$.

   <u>En conclusion :</u> $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$

2. On doit donc ici étudier la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour chaque x réel. Dans la définition de H_n il y a trois positions possibles pour x mais on remarque que lorsque $n \to +\infty$, le cas $x > n$ va disparaitre. On va donc ici distinguer deux cas pour la position de x.

   • Soit x un réel fixé tel que $x < 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

   • Soit x un réel fixé tel que $x \geqslant 0$. Lorsque n va tendre vers $+\infty$, n va devenir très grand et donc à partir d'un moment on aura $0 \leqslant x \leqslant n$. On aura donc $H_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{n\ln(1-x/n)}$.

   Or lorsque $n \to +\infty$, $\frac{x}{n} \to 0$ donc $\ln(1-x/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$ et ainsi $n\ln(1-x/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{n\ln(1-x/n)} = 1 - e^{-x}$.

   En conclusion Y_n converge en loi vers une VAR Y dont la fonction de répartition est :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Y suit donc la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 4:

1. Un somme de VAR indépendantes suivants une loi de Poisson suit une loi de Poisson. Donc S_n suit une loi de Poisson de paramètre $1+1+\cdots+1=n$.
2. On sait que $[S_n \leqslant n] = [S_n = 0] \cup [S_n = 1] \cup \cdots \cup [S_n = n]$ donc comme c'est une union d'événements incompatibles on a $P(Sn \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!}$.
3. Les VAR (X_n) suivent une même loi, sont indépendantes et ont une variance égale à 1 donc non nulle. Le théorème de la limite centrée nous dit donc que S_n^* converge en loi une VAR X qui suit la loi normale centrée réduite. Cela signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} P(S_n^* \leqslant x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$.

   Or on a $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ donc $P(S_n \leqslant n) = P(S_n^* \leqslant 0)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant n) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \\
\Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \qquad \text{car la fonction } t \to e^{-t^2/2} \text{ est paire} \\
\Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2} \qquad \text{car l'intégrale d'une densité vaut 1}
\end{aligned}$$

Exercice 5: Extrait EML 2006

1. Par linéarité de l'espérance on a $E(M_n) = \frac{1}{n}(E(Z_1)+\cdots+E(Z_n)) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$. Donc $m = \frac{1}{p}$.

   De plus comme on a supposé que les Z_i sont indépendantes, on a $V(M_n) = \frac{1}{n^2}(V(Z_1)+\cdots+V(Z_n)) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1-p}{p^2}+\cdots+\frac{1-p}{p^2}\right) = \frac{1-p}{np^2}$. Donc $\sigma_n = \sqrt{\frac{1-p}{np^2}}$.
2. On remarque que $P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n) = P\left(0 \leqslant \frac{M_n - m}{\sigma_n} \leqslant 1\right) = P(0 \leqslant M_n^* \leqslant 1)$.

   Or d'après le théorème de la limite centrée (les Z_i sont indépendantes, suivent la même loi de variance non nulle) M_n^* converge en loi vers une VAR M^* suivant la loi normale centrée réduite. Donc $\lim_{n\to+\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n)$ existe et

$$\lim_{n\to+\infty} P(0 \leqslant M_n - m \leqslant \sigma_n) = \lim_{n\to+\infty} P(0 \leqslant M_n^* \leqslant 1) = P(0 \leqslant M^* \leqslant 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$$

Exercice 6:

Au cours de l'année M. Durand effectue donc $2 \times 5 \times 46 = 460$ trajets.

Notons X_i la VAR égale à la durée en minutes du i-ème trajet. L'énoncé nous dit que les VAR X_i sont mutuellement indépendantes et que $E(X_i) = 45$ et $V(X_i) = 100$.

Le temps que passe M. Durand dans sa voiture en une année est donc $Y = \sum_{i=1}^{460} X_i$ et on cherche à calculer $P(Y \geqslant 21000)$.

La fait de voir une somme de VAR indépendantes suivants toutes la même loi de variance non nulle nous fait penser au théorème de la limite centrée.

Comme ici $460 \geqslant 30$ on peut approcher la loi de Y^* par la loi normale centrée réduite.

On a $Y^* = \dfrac{Y - 460 \times 45}{\sqrt{46000}}$ donc

$$P(Y \geqslant 21000) = P\left(Y^* \geqslant \frac{21000 - 460 \times 45}{\sqrt{46000}}\right) \approx P(Y^* \geqslant 1,40) \approx 1 - \Phi(1,40) \approx 0,0808$$

Exercice 7:

Soit donc X la VAR égale au nombres de pots avariés parmi 1000 pots. On peut voir X comme un système de tirage sans remise. En effet, on dispose d'un lot de N parmi lequel il y a 0,2 % de pots avariés et 99,8 % de pots non avariés. Parmi ces N pots on en choisit 1000 (tirage sans remise) et on compte le nombre de pots avariés parmi ces 1000 pots. On reconnait donc ici que X suit la loi hypergéométrique de paramètres $(N, 1000, 0.002)$.

Le but de cet exercice est de calculer $P(X \leqslant 4)$.

L'énoncé nous dit que l'on peut supposer N bien choisi pour faire des approximations de loi.

On suppose donc que $N \geqslant 10000$ et donc X suit approximativement une loi binomiale de paramètres $(1000, 0.002)$.

De plus on remarque que $1000 \geqslant 30$ et $0,002 \leqslant 0,1$ donc on peut en fait approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $1000 \times 0,002 = 2$.

La table de la loi de Poisson nous donne alors $P(X \leqslant 4) \approx 0,9473$

Exercice 8:

1. X_n compte le nombre de réalisations de l'événements « le jouet est défectueux », qui est de probabilité 0.006, parmi n jouets. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n, 0.006)$.
2. Dans cette question on suppose que $n = 500$. On a donc $n \geqslant 30$ et $0,006 \leqslant 0,1$ donc on peut approcher la loi de X_{500} par la loi de Poisson de paramètre $500 \times 0,006 = 3$.

   On cherche donc à calculer $P(X \leqslant 2)$ et d'après la table de valeurs de la loi de Poisson on a :

$$P(X \leqslant 2) \approx 0,4232$$

Exercice 9:

Comme un employé téléphone en moyenne 6 minutes par heures, la probabilité qu'un employé donné soit en train de téléphoner à un instant t est $\dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10}$.

X est la VAR qui compte le nombre de réalisation de l'événement « l'employé téléphone à l'instant t », qui est de probabilité $0,1$, parmi 300 employés. X suit donc une loi binomiale de paramètres $(300, 0.1)$.

On cherche donc N pour que $P(X \geqslant N) \leqslant 0,025$.

On remarque ici que $300 > 30$, $300 \times 0,1 = 30 > 5$ et $300 \times 0,9 = 270 > 5$ donc on peut approcher la loi de X par la loi normale de paramètres $(30, 27)$ ou encore la loi de $X^* = \dfrac{X - 30}{\sqrt{27}}$ par la loi normale centrée réduite.

On a alors :

$$P(X \geqslant N) = P\left(X^* \geqslant \frac{N - 30}{\sqrt{27}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{N - 30}{\sqrt{27}}\right)$$

On cherche donc N tel que

$$\begin{aligned}
&1-\Phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right) \leqslant 0,025 \\
\Longleftrightarrow &\Phi\left(\frac{N-30}{\sqrt{27}}\right) \geqslant 0,975 \approx \Phi(1,96) \\
\Longleftrightarrow &\frac{N-30}{\sqrt{27}} \geqslant 1,96 \qquad \text{car } \Phi \text{ est croissante} \\
\Longleftrightarrow &N \geqslant \sqrt{27}\times 1,96+30 \approx 40,18
\end{aligned}$$

Il faut donc avoir installé au moins 41 lignes téléphoniques.

Exercice 10:

1. X compte le nombre de réalisations de l'événement « obtenir 6 », qui est de probabilité $\frac{1}{6}$, au cours de 9000 réalisation d'une même expérience donc X suit une loi binomiale de paramètre $\left(9000, \frac{1}{6}\right)$
2. On remarque que $9000 > 30$, $9000\times\frac{1}{6} > 5$ et $9000\times\frac{5}{6} > 5$ donc on peut approcher la loi de X par la loi normale de paramètres $(1500, 1250)$ ou encore la loi de $X^* = \frac{X-1500}{\sqrt{1250}}$ par la loi normale centrée réduite.
3. On veut calculer $P(1400 \leqslant X \leqslant 1600)$.
   • <u>Sans correction de continuité :</u>

$$\begin{aligned}
P(1400 \leqslant X \leqslant 1600) &= P\left(\frac{1400-1500}{\sqrt{1250}} \leqslant X^* \leqslant \frac{1600-1500}{\sqrt{1250}}\right) \\
&\approx P(-2,83 \leqslant X^* \leqslant 2,83) \\
&\approx \Phi(2,83)-\Phi(-2,83) \\
&\approx 2\Phi(2,83)-1 \approx 0,9954
\end{aligned}$$

   • <u>Avec correction de continuité :</u>

$$\begin{aligned}
P(1400 \leqslant X \leqslant 1600) &= P(1399,5 \leqslant X \leqslant 1600,5) \\
&= P\left(\frac{-100,5}{\sqrt{1250}} \leqslant X^* \leqslant \frac{100,5}{\sqrt{1250}}\right) \\
&\approx P(-2,84 \leqslant X^* \leqslant 2,84) \\
&\approx \Phi(2,84)-\Phi(-2,84) \\
&\approx 2\Phi(2,84)-1 \approx 0,9954
\end{aligned}$$

   On remarque qu'il n'y a ici aucune différence si on utilise la correction de continuité ou si on ne l'utilise pas.
4. On a $E(X) = 1500$ et $V(X) = 1250$.
   De plus on remarque que

$$\begin{aligned}
P(1400 \leqslant X \leqslant 1600) = P(-100 \leqslant X-1500 \leqslant 100) &= P(|X-1500| \leqslant 100) \\
&= 1-P(|X-1500| > 100) = 1-P(|X-1500| \geqslant 101)
\end{aligned}$$

   Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a $P(|X-1500| \geqslant 101) \leqslant \frac{1250}{101^2}$ et donc

$$P(1400 \leqslant X \leqslant 1600) \geqslant 1-\frac{1250}{101^2} \approx 0,8775$$

   La minoration de B-T n'est pas du tout précise...