E ev de dimension n, $\mathcal{B}$ base de E, u endomorphisme de E et M matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Généralités

Stabilité

F stable par u: $u(F) \subset F$ ou bien $x \in F \Rightarrow u(x) \in F$
Endo induit: $u_{|F}$
si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et $\mathrm{Im} v$ sont stables par u.
u admet une matrice diagonale par bloc $\Leftrightarrow$ il existe F_i sev u-stables tq $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$

Polynôme en u:

$P(x) = \sum a_k X^k \Rightarrow P(u) = \sum a_k u^k$
$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u)$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$
Polynôme annulateur: $P(u) = 0$
Polynôme minimal: π_u polynôme annulateur de degré minimal qui divise tous les polynômes annulateurs
Décomposition des noyaux si $P \wedge Q = 1$ alors $\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

Idéal de $\mathbb{K}[X]$: $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X]$ tq $0 \in \mathcal{I}$,

$P, Q \in \mathcal{I} \Rightarrow P - Q \in \mathcal{I}$ et $P \in \mathcal{I}, Q \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow P - Q \in \mathcal{I}$
Idéal principal engendré par P: $\langle P \rangle = \{\text{multiple de } P\}$
Thm1: Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ non nul est principal engendré par un unique poly. unitaire.
Thm2: l'ensemble des poly. annulateurs de u est idéal non nul engendré par π_u.

Éléments propres: $u(x) = \lambda x,\ x \neq 0$

Valeur propre: λ. **Spectre**: $\mathrm{sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{u}) = \{\lambda,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$
Vecteur propre: x. **sev propre:** $E_\lambda = \ker(u - \lambda id)$
Polynôme caractéristique: $\chi_u(X) := \det(u - \lambda id)$

Théorèmes Généraux:

Th1: $\lambda \in \mathrm{sp(u)} \Leftrightarrow \mathrm{E}_\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \ker(\mathrm{u} - \lambda \mathrm{id}) \neq 0$
$\Leftrightarrow u - \lambda id$ non inversible $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda id) = 0$
Th2: Si F u-stable alors $\chi_{u|F}$ divise χ_u, $\pi_{u|F}$ divise π_u
Th3: $\deg \chi_u = n, \mathrm{co}(\chi_u) = (-1)^n$
$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr(u)} X^{n-1} + \cdots + \det(\mathrm{u})$
Cayley-Hamilton: $\chi_u(u) = 0, \pi_u$ divise χ_u, $\deg \pi_u \leq n$

Interprétation matricielle:

$P(M) = \sum a_k X^k, P(M) = 0 \Leftrightarrow P(u) = 0, \pi_M = \pi_u$
$\mathrm{sp(M)} = \mathrm{sp(u)}, \chi_M = \chi_u$
Tout ce qui précède reste valable si l'on remplace u par M

Diagonalisation

Définitions:

u est diagoonalisable $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}'$ une base de E tq $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ diagonale, avec $\mathrm{sp(u)} = (\mathrm{d_{ii}})_\mathrm{i}$
M est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists T$ diagonale semblable à M. Dans ce cas $\mathrm{sp(M)} = (\mathrm{d_{ii}})_\mathrm{i}$

Conditions nécessaires et suffisantes:

u diagoble $\Leftrightarrow$ M diagoble, $M = PDP^{-1}, \mathrm{sp(M)} = (\mathrm{d_{ii}})_\mathrm{i}$
Colonnes de P= Vecteurs propres de M
$\Leftrightarrow$ u admet une base propre
$\Leftrightarrow$ $E = \oplus E_\lambda$ où $\lambda \in \mathrm{sp(u)}$
$\Leftrightarrow$ $\dim E = \sum \dim E_\lambda$ où $\lambda \in \mathrm{sp(u)}$
$\Leftrightarrow$ $\dim E_\lambda = \mathrm{mult}(\lambda, \chi_u),\ \forall \lambda \in \mathrm{sp(u)}$
$\Leftrightarrow$ π_u scindé à racines simples
$\Leftrightarrow$ u admet un poly. scindé à racines simples

Conditions nécessaires

u diagoble $\Rightarrow u$ trigoble $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé $\Leftrightarrow \pi_u$ scindé

Conditions suffisantes

χ_u scindé à rac. simpl $\Leftrightarrow \pi_u$ scindé à rac. simpl $\Rightarrow u$ diagoble
Rmq: u diagoble et F u-stable $\Rightarrow u_{|F}$ diagoble.

Thèmes Classiques:

Décomposition de Dunford, **Décomposition polaire**
Diagonalisation simultanée, **Racine d'une matrice**
Calcul de puissance, d'exponentielle matriciels :

Résolution de syst. différentiel linéaire
Étude des suites récurrentes linéaires

Trigonalisation

Définitions:

u est trigonalisable $\Leftrightarrow \exists \mathcal{B}'$ une base de E tq $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ triangulaire, avec $\mathrm{sp(u)} = (\mathrm{t_{ii}})_\mathrm{i}$
M est trigonalisable $\Leftrightarrow \exists T$ triangulaire semblable à M. Dans ce cas $\mathrm{sp(M)} = (\mathrm{t_{ii}})_\mathrm{i}$

Théorèmes généraux:

u trigoble $\Leftrightarrow M$ trigoble $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé
$\Leftrightarrow \pi_u$ scindé
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: tout endom (matrice) est trigoble
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: u est trigoble $\Leftrightarrow \mathrm{sp(u)} \subset \mathbb{R}$
u trigoble et F u-stable $\Rightarrow u_{|F}$ trigoble