

Variables aléatoires à densité

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.

Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X , que l'on note F_X , par $F_X(x) = P(X \leq x)$ pour tout réel x .

I Notion de variable aléatoire à densité

1 Densité

Définition 1

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles
- (ii) f_X est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points
- (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = 1$
- (iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X .

Remarque :

La fonction f_X n'est pas unique c'est pourquoi on dit que c'est **une** densité de X . En effet si g est une fonction égale à f_X sauf en un nombre fini de points alors g est aussi une densité de X .

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X .

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

- (i) f est à valeur réelles positives ou nulles
- (ii) f est continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points
- (iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X .

On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrons que c'est une densité de probabilité.

Nous allons ici appliquer le théorème 1 donc il nous faut vérifier les 3 hypothèses de ce théorème :

- (i) Comme l'exponentielle est positive, f est bien une fonction à valeurs positives ou nulles.
- (ii) • Sur $] -\infty; 0[$ f est la fonction nulle donc f est continue sur $] -\infty; 0[$.
• Sur $] 0; +\infty[$, f est la composée des fonctions $x \rightarrow -x$ et $t \rightarrow e^t$ qui sont continues sur \mathbb{R} , donc f est continue sur $] 0; +\infty[$.

- Ainsi on a montré que f est continue sur \mathbb{R}^* .

(On pourrait essayer de voir si f est continue en 0 mais ce n'est pas nécessaire pour utiliser le théorème 1 donc nous n'allons pas faire de travail inutile...)

(iii) Il nous faut maintenant vérifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ et calculer la valeur de cette intégrale.

- f est nulle sur $] -\infty; 0[$ donc $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ est convergente et vaut 0.

- Montrons la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $A > 0$, $\int_0^A f(x) dx = \int_0^A e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^A = 1 - e^{-A}$.

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx = 1$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$

- En conclusion l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et vaut $0 + 1 = 1$.

f est donc bien une densité de probabilité.

2 Caractérisation par la fonction de répartition

Théorème 2

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est continue sur \mathbb{R} .
- F est de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x , $F'(x) = f(x)$.

Remarques :

- Les variables discrètes ne sont donc pas des variables à densité.
- Comme f est positive, la fonction de répartition est bien croissante.
- La fonction de répartition est une primitive de la densité.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème 3

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F . Si :

- F est continue sur \mathbb{R}
- F est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.

De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X .

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur \mathbb{R} et \mathcal{C}^1 sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F .

Exemple 2:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \frac{8}{x^3} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

On va utiliser le théorème 3 donc nous avons deux choses à vérifier sur F .

(i) Sur $] - \infty; 2[$, F est une fonction constante donc continue. Sur $]2; +\infty[$ la fonction $x \rightarrow \frac{8}{x^3}$ est continue donc F est continue sur cet intervalle.

De plus $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} F(x) = 1 - \frac{8}{8} = 0 = F(2)$.

Donc F est continue sur \mathbb{R} .

(ii) Sur $] - \infty; 2[$, F est une fonction constante donc C^1 . Sur $]2; +\infty[$ la fonction $x \rightarrow \frac{8}{x^3}$ est C^1 donc F est C^1 sur $]2; +\infty[$.

Ainsi F est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et pour $x \neq 2$:

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{24}{x^4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

X est donc bien une variable à densité et une densité de X est par exemple $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{24}{x^4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X .

Théorème 4

Soit F une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si

- (i) F est une fonction continue sur \mathbb{R}
- (ii) F est C^1 sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points
- (iii) F est croissante sur \mathbb{R} .
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

alors il existe un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X .

De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X .

Exemple 3:

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1 - \sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1 + \sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

• Sur $] -\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, F est une fonction constante donc continue. Sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$, F est continue comme composée de fonctions usuelles continues. La continuité ne pose problème qu'en -1 , 0 et 1 . Or :

$$\lim_{-1^-} F = \lim_{-1^+} F = 0 = F(-1)$$

$$\lim_{0^-} F = \lim_{0^+} F = \frac{1}{2} = F(0)$$

$$\lim_{1^-} F = \lim_{1^+} F = 1 = F(1)$$

Donc F est continue sur \mathbb{R} .

• A l'aide des fonctions usuelles on voit que F est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ et sur cet ensemble :

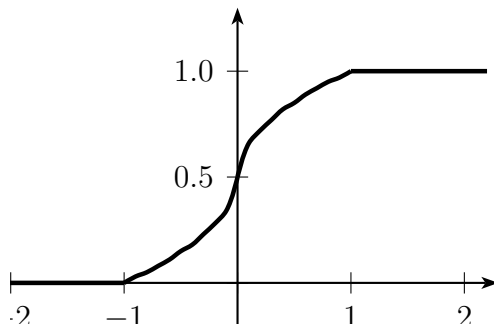
$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

• Aux points où F est dérivable, on voit que $F'(x) \geq 0$ et comme F est continue, F est bien croissante sur \mathbb{R} .

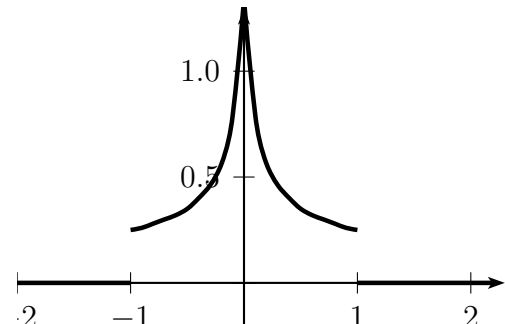
• Enfin $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

On peut donc dire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité. Une densité de X est par exemple :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Représentation graphique de F



Représentation graphique de f

3 Quelques propriétés

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f .

(i) Pour tout x réel :

$$P(X < x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leq b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

Corollaire 1

Soit X une variable à densité et f une densité de X . Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors on a $P(X < a) = 0$ et $P(X > b) = 0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarques :

- La probabilité de l'événement $[a \leq X \leq b]$ apparait comme l'aire de la partie du plan située en dessous de la courbe représentative de f , au dessus de l'axe des abscisse et entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- On voit que contrairement aux variables discrètes, on a ici pour tout x , $P(X = x) = 0$. Ainsi ce n'est pas la donnée de $P(X = x)$ qui est la loi de X mais plutôt la donnée de la fonction de répartition ou de la densité.

4 Indépendance

Définition 2

Des VAR à densité X_1, \dots, X_n sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) sont dites **indépendantes** si pour tous réels (x_1, \dots, x_n) :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x_k]\right) = \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x_k)$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x) \times P(Y \leq y)$.

II Moments d'une variable aléatoire à densité

1 Espérance

a Définition

Définition 3

Soit X une VAR de densité f . Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$$

Exemple 4:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X . X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

•

- (i) Comme $x(1-x) \geq 0$ pour $x \in [0; 1]$, f est bien une fonction positive.
- (ii) De plus on vérifie facilement que f est continue sur \mathbb{R} .
- (iii) Enfin on voit que $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ et $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ sont convergentes car f est nulle sur $] -\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$ et $\int_0^1 f(x) dx$ est convergente car f est continue sur $[0; 1]$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 6x(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = \int_0^1 (6x - 6x^2) dx = [3x^2 - 2x^3]_0^1 = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité.

• La fonction $x \rightarrow |xf(x)|$ est nulle sur $] -\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$ donc $\int_{-\infty}^0 |xf(x)| dx$ et $\int_1^{+\infty} |xf(x)| dx$ sont convergents. De plus $x \rightarrow |xf(x)|$ est continue sur $[0; 1]$ donc $\int_0^1 |xf(x)| dx$ est aussi convergent.

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est absolument convergente et X admet donc une espérance. De plus :

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^1 6x^2(1-x) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X . X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.

•

(i) f est bien une fonction à valeurs positive

(ii) De plus f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(iii) On voit que $\int_{-\infty}^1 f(x) dx$ est convergente car f est nulle sur $] -\infty; 1[$.

Sur $[1; +\infty[$, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{A} \right) = 1$$

f est donc bien une densité de probabilité.

• - Sur $] -\infty; 1[$, $|xf(x)| = 0$ donc $\int_{-\infty}^1 |xf(x)| dx$ converge.

- Sur $[1; +\infty[$, $|xf(x)| = \frac{1}{x}$ et donc $\int_1^{+\infty} |xf(x)| dx$ diverge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ n'est pas absolument convergente et donc X n'admet donc pas d'espérance.

Définition 4

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X est une variable centrée.

b Linéarité

Propriété 2

Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b , $aX + b$ admet une espérance et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Théorème 5

Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X + Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

c Moment d'ordre r

Définition 5

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre r** , notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

Remarque :

Le moment d'ordre 1 de X est tout simplement l'espérance de X .

2 Variance et écart-type

Définition 6

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de X** le réel

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème 6

Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple 6:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1 - x)$ si $x \in [0; 1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \frac{1}{2}$.

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Il nous reste ici à vérifier que X admet un moment d'ordre 2 et à le calculer.

- Sur $]-\infty; 0]$ et sur $[1; +\infty[$, $|x^2 f(x)| = 0$ donc $\int_{-\infty}^0 |x^2 f(x)| dx$ et $\int_1^{+\infty} |x^2 f(x)| dx$ sont convergentes.

- Sur $[0; 1]$ $x \rightarrow |x^2 f(x)|$ est continue donc $\int_0^1 |x^2 f(x)| dx$ est convergente.

Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ est absolument convergente ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.

De plus :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4) dx = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

$$\text{Donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{2}{x^3}$ si $x \geq 1$.
 X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

• Sur $]-\infty; 1[$, $|xf(x)| = 0$ donc $\int_{-\infty}^1 |xf(x)| dx$ converge.

Sur $[1; +\infty[$, $|xf(x)| = \frac{2}{x^2}$ et donc $\int_1^{+\infty} |xf(x)| dx$ converge, car $2 > 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ est absolument convergente ce qui signifie que X admet une espérance qui vaut

$$E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx = 2. \text{ (On a déjà calculé dans l'exemple 5 } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{)}$$

• Sur $]-\infty; 1[$, $|x^2f(x)| = 0$ donc $\int_{-\infty}^1 |x^2f(x)| dx$ converge.

Sur $[1; +\infty[$, $|x^2f(x)| = \frac{2}{x}$ et donc $\int_1^{+\infty} |x^2f(x)| dx$ diverge.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x) dx$ ne converge pas absolument et ainsi X n'admet pas de moment d'ordre 2 et donc n'admet pas de variance.

Définition 7

Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété 3

Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors pour tout réels a et b , $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2V(X)$

Définition 8

Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une **variable réduite**.

Définition 9

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à X** .

III Lois usuelles

1 Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a; b]$.

Définition 10

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 4

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Démonstration :

Par définition de la densité, on sait que la fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

– Si $x \leq a$ sur $]-\infty; x]$ on a $f(t) = 0$ et donc alors $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

– Si $a < x < b$ alors si $t \in]-\infty; x]$ on a $f(t) = 0$ si $t \leq a$ et $f(t) = \frac{1}{b-a}$ si $a < t \leq x$ donc

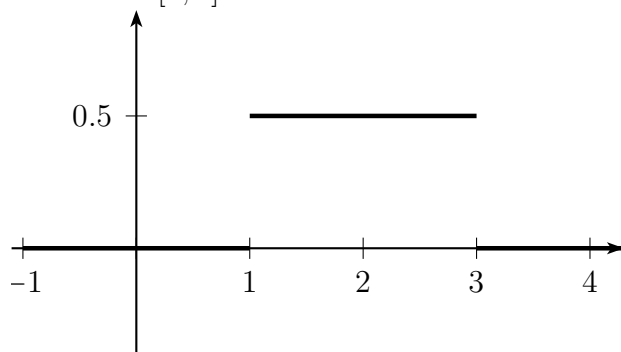
$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

– Si $x \geq b$ alors

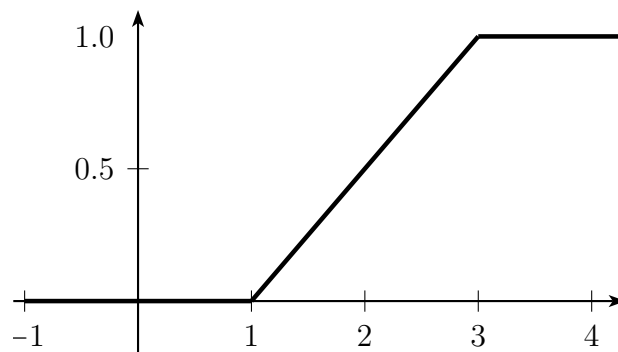
$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a} \right]_a^b + 0 = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

On a donc bien le résultat demandé. □

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1; 3]$:



Densité de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1; 3])$

Théorème 7

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors X admet une espérance égale à $\frac{a+b}{2}$.

Démonstration :

Sur $] -\infty; a]$ et sur $[b; +\infty[$, la fonction $t \rightarrow |tf(t)|$ est nulle donc $\int_{-\infty}^a |tf(t)| dt$ et $\int_b^{+\infty} |tf(t)| dt$ sont convergente. De plus $t \rightarrow |tf(t)|$ est continue sur $]a; b[$ et admet des limites finies en a et b donc $\int_a^b |tf(t)| dt$ est convergente.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est donc absolument convergente et X admet donc une espérance.

De plus :

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

□

La variance sera vue en exercice mais doit savoir être retrouvée très vite.

2 Loi exponentielle

Définition 11

Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Propriété 5

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Démonstration :

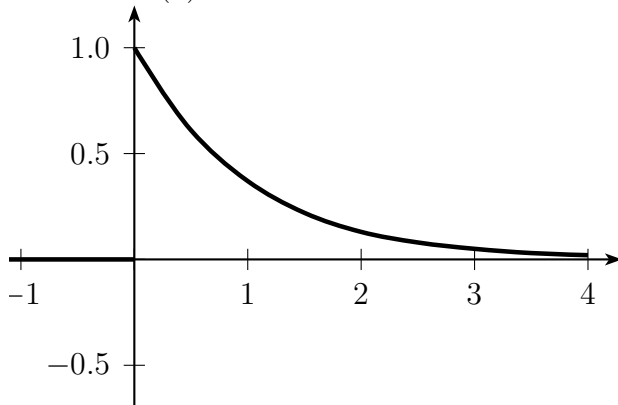
On a pour tout réel x , $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- Si $x < 0$ alors pour tout $t \in]-\infty; x]$, $f(t) = 0$ et donc $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

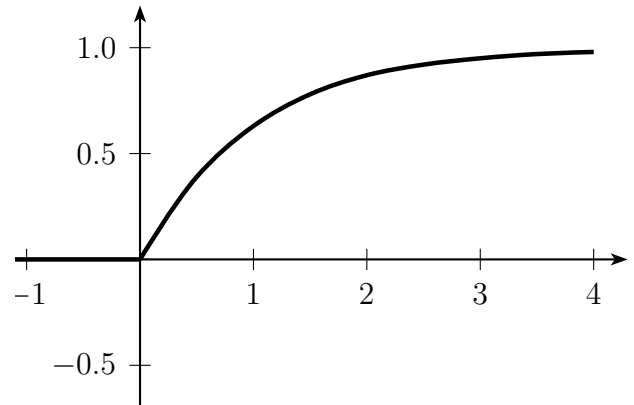
- Si $x \geq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

□

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème 8

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration :

Calculons uniquement l'espérance.

Sur $] -\infty; 0[$ la fonction $t \rightarrow |tf(t)|$ est nulle donc $\int_{-\infty}^0 |tf(t)| dt$ est convergente et vaut 0.

Sur $[0; +\infty[$ la fonction $t \rightarrow |tf(t)|$ est continue donc le problème se pose uniquement en $+\infty$. Soit $A > 0$:

$$\int_0^A |tf(t)| dt = \int_0^A \lambda t e^{-\lambda t} dt = [-te^{-\lambda t}]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda t} dt = -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} -Ae^{-\lambda A} - \frac{e^{-\lambda A}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ donc $\int_0^{+\infty} |tf(t)| dt$ est convergente et vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ est absolument convergente donc X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

□

Théorème 9

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans \mathbb{R}^+ .
 X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s + t) = P(X > t) \quad (1)$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition 12

Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Démonstration : Hors programme

Nous n'allons ici démontrer qu'un sens de l'équivalence :

Soit X suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors pour tout réels s et t positifs :

$$\begin{aligned} P_{[X>s]}(X > s + t) &= \frac{P([X > s + t] \cap [X > s])}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} \end{aligned}$$

Or $P(X > s) = \int_s^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_s^{+\infty} = e^{-\lambda s}$ et de même $P(X > s + t) = e^{-\lambda(s+t)}$.

Donc :

$$P_{[X>s]}(X > s + t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

□

3 Loi normale

a Loi normale centrée réduite

Définition 13

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

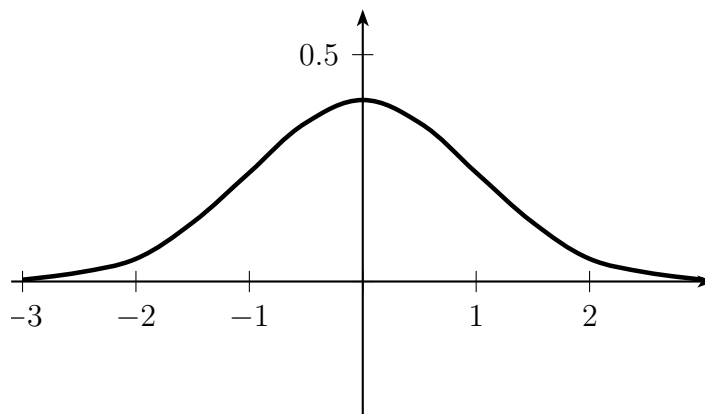
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Propriété 6

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0, 1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstration :

Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t) dt = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-x} f(t) dt \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_{-A}^x f(-u) (-du) \quad \text{changement de variable } u = -t \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_x^{-A} f(u) du = \int_x^{+\infty} f(u) du = 1 - \Phi(x) \end{aligned}$$

□

Théorème 10

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \quad V(X) = 1$$

b Loi normale de Laplace-Gauss

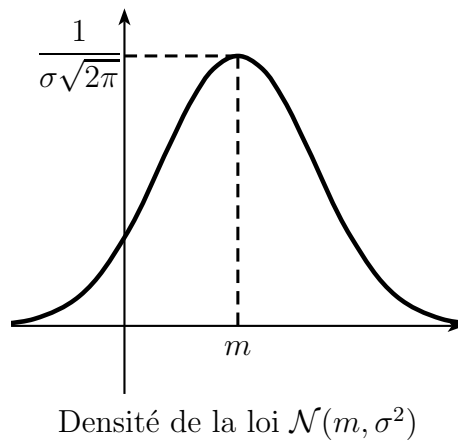
Définition 14

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Théorème 11

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2$$

IV Exemples de fonctions d'une variable à densité

Lorsqu'on vous donne une variable à densité X vous devez être capable, pour des fonctions g assez simples, de déterminer une densité de la variable $g(X)$. La méthode est toujours la même et nous allons ici traiter 3 cas de fonctions g simples.

On peut aussi vous demander de calculer l'espérance de $g(X)$. Voici donc le **théorème de transfert** :

Théorème 12

Soient X une VAR de densité f et g une fonction continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$ est absolument convergente alors la variable $g(X)$ admet une espérance et :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t) dt$$

1 g est affine

Exemple 8:

Soit X une variable aléatoire de densité f et soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

On considère la variable aléatoire $Y = aX + b$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y .

- **Étape 1 : fonction de répartition de Y**

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y .

Le but est d'exprimer G en fonction de F .

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = P(Y \leq x) = P(aX + b \leq x) = P(aX \leq x - b)$. Afin de « passer a de l'autre côté » il nous faut différencier 2 cas :

- Si $a > 0, G(x) = P\left(X \leq \frac{x - b}{a}\right) = F\left(\frac{x - b}{a}\right)$
- Si $a < 0, G(x) = P\left(X \geq \frac{x - b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x - b}{a}\right)$

– **Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité**

On souhaite ici utiliser le théorème 3 donc nous avons deux hypothèses à vérifier sur G .

• Que a soit positif ou négatif, G est bien une fonction continue sur \mathbb{R} car F est continue ainsi que la fonction $x \rightarrow \frac{x-b}{a}$.

• Si on note x_1, \dots, x_n les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = ax_i + b$, on voit que G est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$.

On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.

– **Étape 3 : donner une densité de Y**

Pour donner une densité de Y il nous faut calculer G' . En tout point où G est dérivable, on a :

$$\begin{cases} \text{si } a > 0 & G'(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ \text{si } a < 0 & G'(x) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{cases}$$

Ainsi en posant $g(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$ on a obtenu une densité de Y .

Grâce à cet exemple on peut démontrer la propriété suivante qui montre que toutes les lois normales sont liées à la loi normale centrée réduite :

Propriété 7

X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) si et seulement si $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Démonstration : Hors programme

Nous allons ici utiliser ce que nous avons fait dans l'exemple 8, qui nous permet de dire

que si X est de densité f alors $aX + b$ est de densité $\frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right)$

• Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors la densité de $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est :

$$g(x) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma(x-m/\sigma) - m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

• Supposons que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors $X = \sigma Y + m$ et donc une densité de X est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2/\sigma^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

□

Cette propriété sera extrêmement importante dans les deux chapitres suivants.

Exemple 9:

Soit X une variable aléatoire de densité f .

On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y .

– **Étape 1 : fonction de répartition de Y**

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y .

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x)$

• Si $x < 0$, $G(x) = 0$.

• Si $x \geq 0$, $G(x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$

– **Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité**

• G est bien évidemment continue sur $] -\infty; 0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0; +\infty[$. De plus $\lim_{0^+} G = F(0) - F(0) = 0 = \lim_{0^-} G = G(0)$ donc G est en fait continue sur \mathbb{R} .

• Si on note x_1, \dots, x_n les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = x_i^2$, on voit que G est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \dots, y_n\}$.

On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.

– **Étape 3 : donner une densité de Y**

Lorsque $G'(x)$ existe, on a $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} (f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ on obtient une densité de Y .

3 Fonction exponentielle

Exemple 10:

Soit X une variable aléatoire de densité f .

On considère la variable aléatoire $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y .

– **Étape 1 : fonction de répartition de Y**

On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y .

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leq x) = P(e^X \leq x)$

• Si $x \leq 0$, $G(x) = 0$.

• Si $x > 0$, $G(x) = P(X \leq \ln(x)) = F(\ln(x))$

– **Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité**

• G est bien évidemment continue sur $] -\infty; 0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0; +\infty[$. De plus $\lim_{0^+} G = 0$ car $\lim_{-\infty} F = 0$, et comme $\lim_{0^-} G = 0 = G(0)$, G est en fait continue sur \mathbb{R} .

• Si on note x_1, \dots, x_n les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = e^{x_i}$, on voit que G est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \dots, y_n\}$.

On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.

– **Étape 3 : donner une densité de Y**

• Lorsque $G'(x)$ existe, on a $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ on obtient une densité de Y .

A savoir

- Je dois savoir répondre à la question « Montrer que f est une densité de probabilité. »
- Si on me donne une VAR X dont je connais la densité f je dois savoir calculer sa fonction de répartition grâce à la formule : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. (cf. exercice 1)
- Si je connais la fonction de répartition F d'une VAR X je dois savoir répondre à la question « Montrer que X est une VAR à densité et donner une densité de X . » (cf. théo 3)
- Si on me donne une fonction F , sans rien me dire de plus, je dois savoir répondre à la question « Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et donner une densité de X . » (cf. théo 4)

La différence avec le point d'avant est qu'ici on ne sait pas déjà que F est une fonction de répartition.

- Je dois savoir rapidement faire le lien entre des calculs de probabilités, la densité et la fonction de répartition. Soit X une VAR de densité f et de fonction de répartition F :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X = a) = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

la formule est aussi valable avec des inégalités strictes

- Je dois connaître la définition de l'indépendance de VAR à densité (cf. définition 2)
- Je dois connaître la définition de l'espérance, du moment d'ordre r , et de la variance d'une VAR à densité (cf. définitions 3, 5 et 6) et je dois savoir les reconnaître dans un exercice pour utiliser les variables usuelles (cf. exercice 14).
- Je dois connaître les propriétés de l'espérance : théorème de transfert, linéarité, ...
- Je dois savoir construire la variable centrée réduite associée à n'importe quelle variable aléatoire X .
 On la note X^* :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- Lois usuelles :

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a; b])$	$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a; b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0, 1)$	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

- Je dois savoir bien manipuler la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : formule $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ et savoir lire le tableau de valeur de Φ .
- Je dois savoir que si X suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors X^* suit la loi normale centrée réduite.
- Si on me donne une VAR X je dois savoir trouver la fonction de répartition d'une VAR Y qui s'exprime en fonction de X (par exemple $2X - 1, X^2, e^X, \dots$)