Eq. diff dinéaires

Equa. diff. lin. d'ordre 1

$(E):\ a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x)$

$(EH):\ a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0$

Sol. gle de (EH): $y_H(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{dt}}$

$\mathcal{S}_H$: ensble. de sol. de (EH) ev. de dim=1

Sol. part. de (E): $y_0(x)=\lambda(x)\mathrm{e}^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{dt}}$

$$\lambda'(x)=\frac{c(x)}{a(x)\mathrm{e}^{-\int^x \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{dt}}}$$

Sol. gle. de (E): $y=y_0+y_H$

$\mathcal{S}=y_0+\mathcal{S}_H$ ensble. de sol. de (E) espace affine de dim=1

Equa. diff. lin. d'ordre 2 a coeff. cte

$(E):\ ay''(x)+by'(x)+cy(x)=\mathrm{e}^{\gamma x}P(x)$

$(EH):\ ay''(x)+by'(x)+cy(x)=0$

Equa. caractéristique: $ar^2+br+c=0$, $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0, r_1, r_2$ sol. réelles de $(*)$:
$y_H(t)=\lambda \mathrm{e}^{r_1 t}+\mu \mathrm{e}^{r_2 t}$

$\Delta=0, r$ solution double de (*):
$y_H(t)=(\lambda+\mu t)\mathrm{e}^{rt}$

$\Delta<0$, z l'une des sol complexe de (*)
$y_H(t)=\mathrm{e}^{(\mathrm{Re}z)t}(\lambda\cos((\mathrm{Im}z)t)+\mu\sin((\mathrm{Im}z)t))$

$y_0=\mathrm{e}^{\gamma x}Q(x)$

$\deg Q=\deg P$ si γ n'est pas sol de (*)

$\deg Q=\deg P+1$ si γ sol. simple de (*)

$\deg Q=\deg P+2$ si γ sol. double de (*)

$(a\gamma^2+b\gamma+c)Q+(2a\gamma+b)Q'+aQ"=P$

$\mathcal{S}_H$ ev de dim=2, $\mathcal{S}$ esp. aff. de dim=2

Equa. diff. lin. d'ordre 2 a coeff. non cte

$(E):\ a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=d(x)$

$(EH):\ a(x)y''(x)+b(x)y'(x)+c(x)y(x)=0$

$y_H(x)=\lambda_1 y_1(x)+\lambda_1 y_2(x)$

y_1 sol. part. de (EH)

$y_2(x)$ une autre sol. part. de (EH)

$y_H(x)=\lambda_1(x)y_1(x)+\lambda_1(x)y_2(x)$

$$\begin{cases}\lambda_1'(x)y_1(x)+\lambda_2'(x)y_2(x)=0\\ \lambda_1(x)'y_1(x)+\lambda_2'(x)y_2'(x)=c(x)\end{cases}$$

$\mathcal{S}_H$ ev de dim=2, $\mathcal{S}$ esp. aff. de dim=2

Syst. diff. linéaires

Système différentiel linéaire de taille n

$$\begin{cases}x_1'=a_{1,1}(t)x_1+\cdots+a_{1,n}(t)x_n+b_1(t)\\ \vdots\\ x_n'=a_{n,1}(t)x_1+\cdots+a_{n,n}(t)x_n+b_n(t)\end{cases}$$

Écriture matricielle: $X'(t)=A(t)X(t)+B(t)$

Formule de Liouville-Duhamel:

$$X(t)=\mathrm{e}^{F(t)}\left(X(t_0)+\int_{t_0}^t \mathrm{e}^{-F(u)}B(u)du\right),$$

$F(t)=\int_0^t A(u)du$.

Système différentiel homogène à coeff. cte:

$X'(t)=AX(t)\Rightarrow X(t)=\mathrm{e}^{tA}X(0)=\sum\lambda_i C_i(t)$

λ_i coeff de $X(0)$. $C_i(t)$: colonnes de e^{tA}

Système fondamental et Wronskien

$\mathcal{S}_H$ ev de dim=n, $\mathcal{S}$ esp. affine de dim=n

Système fondamental: $(X_i)_{1\le i\le n}$ base de $\mathcal{S}_H$

Sol. gle de (EH): $X(t)=\sum\lambda_i X_i(t)$

Sol. part de (E): $X(t)=\sum\lambda_i(t)X_i(t)$

Wronskien: $W(t)=\det(X_1(t),\dots,X_n(t))$

$(X_i)_{1\le i\le n}$ syst fond $\Leftrightarrow \forall t, W(t)\neq 0$
$\Leftrightarrow \exists t, W(t)\neq 0$

Equa. diff. linéaire d'ordre n

$a_n(t)y^{(n)}+\dots a_0 y(t)=b(t)\Leftrightarrow X'=AX+B$

$X(t)={}^t(y(t),\dots,y^{(n-1)}(t))$

$A(t)={}^t\mathrm{Comp}\left(-\frac{a_0(t)}{a_n(t)},\dots,-\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}\right)$

$B(t)={}^t\left(0,\dots,0,-\frac{b(t)}{a_n(t)}\right)$

Equa. diff lin. d'ordre n à coeff. cte:

$a_n y^{(n)}(t)+\dots a_0 y(t)=b(t)$

$(*):\ a_n r^n+\dots a_0=0$ eq. caractéristique

Si r sol. particulière de (*) de mult k alors $x^j\mathrm{e}^{rx}$ sol. part. de (EH), on obtient ainsi un syst. fond. $\{y_1,\dots y_n\}$

$y_H(t)=\sum_{i=1}^n\lambda_i y_i(t), y_0(t)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)y_i(t)$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^n\lambda_i'(t)y_i(t)=0\\ \sum_{i=1}^n\lambda_i'(t)y_i'(t)=0\vdots\\ \sum_{i=1}^n\lambda_i'(t)y_i^{(n-2)}(t)=0\\ \sum_{i=1}^n\lambda_i'(t)y_i^{(n-1)}(t)=-\frac{b(t)}{a_n(t)}\end{cases}$$

Eq. diff. non linéaires

Eq. diff. non linéaire d'ordre 1

$y'=f(x,y)$, $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continue

$y:I\to\mathbb{R}$ dérivable $\begin{cases}\forall x\in I,(x,y(x))\in U\\ \forall x\in I, y'(x)=f(x,y(x))\end{cases}$

Solution maximale: ne peut pas être prolongée en une autre solution définie sur un intervalle strictement plus grand.

Courbe intégrale: courbe d'une solution maximale.

Une solution définie sur $\mathbb{R}$ est une maximale.

Toute restriction d'une solution maximale est sol.

Toute solution est restriction d'une sol. max.

Problème de Cauchy: $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si $(x_0,y_0)\in U$ et si f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors le problème de Cauchy admet une unique solution maximale.

Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U, alors par tout point (x_0,y_0) de U passe une unique courbe intégrale

Équation autonome d'ordre 1:$y'=f(y)$

Théorème de Cauchy-Lipschitz Si $y_0\in I$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases}y'=f(y)\\ y(0)=y_0\end{cases}$.

Les solutions de $y'=f(y)$ sont constantes ou injectives.

Système autonome de taille 2: $\begin{cases}x'=f(x,y)\\ y'=g(x,y)\end{cases}$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors le problème de Cauchy $x'=f(x,y), y'=g(x,y), x(0)=x_0, y(0)=y_0$ admet une sol. max. unique

Les solutions maximales sont injectives ou bien périodiques

Équation autonome d'ordre 2: $y"=f(y,y')$

$y"=f(y,y')\Leftrightarrow\begin{cases}x'=y\\ y'=f(x,y)\end{cases}$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors le problème de Cauchy $y"=f(y,y'), y(0)=y_0$ et $y'(0)=y_1$ admet une sol. max. unique