My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

ممّوني مولاي اسماعيل

MATH PrEPaS

MP

Equa Diff

Les Astuces & Les Classiques
Les Annales

Objectifs

- savoir résoudre une équation différentielle d'ordre 1 (sup)
- savoir résoudre une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients cte (sup)
- savoir résoudre une équation différentielle d'ordre 2 qlq (classique 2)
- savoir résoudre un système différentielle (classique 2)
- savoir résoudre une équation différentielle d'ordre n qlq (classique 3)

Classique 1 : Résolution d'une équa diff d'ordre 1

Astuce 1
Pour résoudre une équation diff d'ordre 1 de la forme

$$(E) : a(x).y'(x)+b(x).y(x) = c(x)$$

étape 1 : On pose (EH) : $a(x).y'(x)+b(x).y(x) = 0$
étape 2 : On conclut que y_H solution générale de (EH) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda .y_1(x) \text{ où } \lambda=cte$$

$$\text{tq } y_1(x)= \exp (F(x)) \text{ où } F(x)=-\int^x b(t)/ a(t)\, dt$$

étape 3 : On conclut que y_P solution particulière de (E) s'écrit

$$y_P(x)=\lambda(x).y_1(x)$$: Méthode de la variation de la cte

étape 4 : On trouve $\lambda(x)$ grâce à la formule dite de Lagrange ou Liouville

$$\lambda'(x) .y'(x)=c(x) / a(x)$$

étape 5 : On conclut la solution générale de (E) est $y = y_H + y_P$

Classique 2: Résolution d'une équa diff d'ordre 2 à coeff cte

Astuce
Pour résoudre une équation diff d'ordre 1 de la forme

$$(E) : a.y''(x)+b.y'(x) +c.y(x) = d(x)$$

étape 1 : On pose (EH) : $a.y''(x)+b.y'(x) +c.y(x) = 0$
étape 2 : On pose (*) $ar^2 + br +c =0$ et $\Delta=b^2 - 4ac$

1er cas : $\Delta\neq0$: r1 et r2 solutions simples de (*)

$$y_1(x) =e^{r1.x} \text{ et } y_2(x) =e^{r2.x}$$

2eme cas : $\Delta=0$: r solutions double de (*)

$$y_1(x) =e^{r.x} \text{ et } y2(x) = x.\ e^{r.x}$$

étape 3 : On conclut que y_H solution générale de (EH) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1 .y_1(x) + \lambda_2 .y_2(x)$$: Formule de Lagrange

étape 5 : On conclut que y_P solution particulière de (E) s'écrit

$$y_P(x)=\lambda_1(x).y_1(x) + \lambda_2(x) .y_2(x)$$ (Variation des cte)

étape 6 : On trouve $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ grâce à la formule dite de Lagrange ou Liouville

$$\lambda_1'(x).y_1(x) + \lambda_2'(x) .y_2(x) =0$$
$$\lambda_1'(x).y_1'(x) + \lambda_2'(x) .y_2'(x)=d(x) / a$$

étape 7 : On conclut la solution générale de (E) est $y = y_H + y_P$

Classique 3 : Résolution d'une équa diff d'ordre 2 qlq

Astuce
Pour résoudre une équation diff d'ordre 2 de la forme

$$(E) : a(x).y''(x)+b(x).y'(x)+c(x).y(x)=d(x)$$

étape 1 : On pose (EH) : $a(x).y''(x)+b(x).y'(x)+c(x).y(x)=0$
étape 2 : chercher $y_1(x)= \Sigma a_n x^n$ solution de (EH)
étape 3 : chercher $y_2(x)= \lambda(x) .y_1(x)$ solution de (EH)
Pour cela Il suffit d'injecter l'expression $y_2(x)= \lambda(x) .y_1(x)$ dans (EH) et trouver que λ' vérifie une equa diff d'ordre 1
En déduire λ' puis λ
étape 4 : On conclut que y_H solution générale de (EH) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1 .y_1(x) + \lambda_2 .y_2(x)$$: Formule de Lagrange

étape 5 : On conclut que y_P solution particulière de (E) s'écrit

$$y_P(x)=\lambda_1(x).y_1(x) + \lambda_2(x) .y_2(x)$$ (Variation des cte)

étape 6 : On trouve $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ grâce à la formule dite de Lagrange ou Liouville

$$\lambda_1'(x).y_1(x) + \lambda_2'(x) .y_2(x) =0$$
$$\lambda_1'(x).y_1'(x) + \lambda_2'(x) .y_2'(x)=d(x) / a(x)$$

étape 7 : On conclut la solution générale de (E) est $y = y_H + y_P$

Astuce 2 : Comment trouver y_1
On pose $y_1(x)= \Sigma a_n x^n$ solution de (EH)
étape 1 : dériver $y_1'(x)= \Sigma n a_n x^{n-1}$ et $y_1''(x)= \Sigma n(n-1)a_n x^{n-2}$
étape 2 : Injecter ces relations dans (EH)
étape 3 : Effectuer des changement d'indice pour rendre toutes les puissances à une puissance commune
étape 4 : par identification trouver une relation entre a_n, a_{n+1} et parfois a_{n+2}
étape 5 : en déduire a_n en fct de n
étape 6 : Injecter cette expression de a_n dans $y_1(x)= \Sigma a_n x^n$ puis en déduire $y_1(x)$ en utilisant un DSE usuel

$$\boxed{a y_1'' + b y_1' + c y_1 = 0}$$

$$c \times \quad y_2 = \lambda y_1$$

$$b \times \quad y_2' = \lambda y_1' + \lambda' y_1$$

$$a \times \quad y_2'' = \lambda y_1'' + 2\lambda' y_1' + \lambda'' y_1$$

$$a y_2'' + b y_2' + c y_2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(2a y_1' + b y_1)\lambda' + a y_1 \lambda'' = 0$$

$$z = \lambda'$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot z' + B z = 0$$

Application 1 :

Résoudre $x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$.

Solution

(EH) : $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$

$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solution de (EH)

$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow 4x y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n$

$y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow x^2 y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n$

$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1) + 4n + 2]\, a_n x^n + 6a_1 x + 2a_0 = 0$

$a_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $(n(n-1) + 4n + 2)\, a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$

$(n^2 + 3n + 2)\, a_n = 0$ pour $n \geq 2$, donc $a_n = 0$ tout $n \geq 2$

$(n+1)(n+2) a_n = 0$ pour $n \geq 2$, donc $a_n = 0$ tout $n \geq 2$

donc $y_1(x) = 0$ (impossible)

Astuce
En cas de problème on cherche $y_1(x)$ solution de (E)

Ici $2a_0+ 6a_1 x + \Sigma_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)\, a_n x^n = e^x = 1+ x +\Sigma_{n=2}^{\infty} x^n / n\,!$
Par identification
$2a_0= 1$, $a_1 =1/6$ et an $= 1/n\,!(n+1)(n+2) = 1/(n+2)\,!$ Pour tout $n\geq 2$
$a_n = 1/(n+2)\,!$ Pour tout $n\geq 0$
$y_1(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n /(n+2)\,!$
$=x^{-2}\,\Sigma_{n=0}^{\infty} x^{n+2} /(n+2)\,! =x^{-2}\,\Sigma_{n=2}^{\infty} x^n /n\,! =x^{-2}\,(e^x -1-x)$

Application 2 :
$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = \cos(x)$

$y_1(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ solution de (EH)
$y_1'(x)= \Sigma_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \Rightarrow -2xy_1'(x)= -\Sigma_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n$
$y_1''(x)= \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \Rightarrow y_1''(x)= \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$
$y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) =0$
$\Rightarrow \Sigma_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \Sigma_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \Sigma_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n =0$
$\Rightarrow \Sigma_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \Sigma_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n - \Sigma_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n =0$
$\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} -2na_n - 2a_n]x^n + 2a_2 - 2a_0 =0$
$\Rightarrow \Sigma_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} -2(n+1)a_n]x^n + 2(a_2 -a_0)=0$
Par identification : $(n+2)(n+1)a_{n+2} -2(n+1)a_n = 0$ pour $n\geq 1$ et $a_2 =a_0$
$a_{n+2} =2a_n / (n+2)$ pour $n\geq 0$ (suite récurrente à deux pas) ; relation entre a_{n+2} et a_n l'avantage : on trouve à la fois y_1 et y_2
On trouve y1 à l'aide des coefficients pairs et y2 à l'aide des coefficients impairs
$a_{2n} =2a_{2n-2} / 2n = a_{2n-2} / n = a_{2n-4} / n(n-1) = \ldots\ldots= a_0 / n(n-1) \ldots 1 = \lambda / n\,!$
$y_1(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \lambda\, \Sigma_{n=0}^{\infty} x^{2n}/ n\,! = \lambda\, \Sigma_{n=0}^{\infty} (x^2)^n/ n\,! = \lambda \exp(x^2)$
$a_{2n+1} =2a_{2n-1} / (2n+1) = 4a_{2n-3} / (2n+1)(2n-1) = \ldots\ldots$
$= 2^n a_1/[(2n+1)(2n-1) \ldots 1]$
$= 2^n a_1 (2n)(2n-2) \ldots 2/[(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \ldots 1]$
$= a_1\, 4^n\, n\,! / (2n+1)\,!$
$y_2(x)= \Sigma_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n} = \mu\, \Sigma_{n=0}^{\infty} 4^n\, n\,! / (2n+1)\,!\, x^{2n+1}=$ … arctan

Méthode 2 : $y_2(x)=\lambda (x)\exp(x^2)$

Classique 4 : Résolution d'un système différentiel

Astuce 1

Pour résoudre un système différentiel

(E) : $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

(EH) : $X'(t) = A(t)X(t)$

où $X(t)$ = colonnes et $A(t)$ une matrice

1^er^ cas : $A(t) = Cte$ (ne dépend pas de t)

$X_H(t) = e^{tA}.\, X_0$ solution générale de EH

$X_P(t) = \lambda_1(t)C_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)C_n(t)$

où $C_k(t)$ les colonnes de e^{tA}

où $\lambda_k(t)$ coefficients de la colonne $Y(t)$ tq $A(t)Y'(t)=B(t)$

2^eme^ cas : $A(t)$ diagonalisable avec $A(t)=P.D(t).P^{-1}$

tq $P=Cte$ (ne dépend pas de t)

(EH) $\Leftrightarrow X'(t) = P.D(t).P^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = D(t).P^{-1}X(t)$

$\Leftrightarrow (P^{-1}X)'(t) = D(t).(P^{-1}X)(t)$

$\Leftrightarrow Y'(t) = D(t)\,Y(t)$ (EH') où $Y=P^{-1}X$

On résout (EH') facile à résoudre

On en déduit Y

On en déduit $X_H=PY$

On en déduit la forme $X_H(t) = \lambda_1 C_1(t) + \ldots + \lambda_n C_n(t)$

On conclut que $\{C_1(t), \ldots, C_n(t)\}$ un système fondamental

On concours que $X_P(t) = \lambda_1(t)C_1(t) + \ldots + \lambda_n(t)C_n(t)$

où $C_k(t)$ les colonnes de $e^{F(t)}$ où $F(t)$= primitive de $A(t)$

où $\lambda_k(t)$ coefficients de la colonne $Y(t)$ tq

$\lambda_1'(t)C_1(t) + \ldots + \lambda_n'(t)C_n(t) = B(t)$

Avantage : On trouve les colonnes de $e^{F(t)}$ sans calculer $e^{F(t)}$

3^eme^ cas : $A(t)$ trigonalisation avec $A(t)=P.T(t).P^{-1}$

tq $P=Cte$ (ne dépend pas de t)

Reprendre les étape du cas diagonalisable

3^eme^ cas cas général: utiliser formule Sturm-Liouville (Voir fiche de cours)

Exercice 17

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 18

Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 19

Résoudre le système différentiel suivant

Exercice 18 :

C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

Commençons par résoudre l'équation homogène $X' = A(t)X$.

$\chi_{A(t)} = (X-1)^2$.

$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = PT(t)P^{-1}$ avec

$T(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = T(t)Y$$

En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = T(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \mu \mathrm{e}^t + \dfrac{\lambda}{2}t^2\mathrm{e}^t \\ y_2 = \lambda \mathrm{e}^t \end{cases}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

En écrivant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Y' = T(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \mu \mathrm{e}^t + \dfrac{\lambda}{2} t^2 \mathrm{e}^t \\ y_2 = \lambda \mathrm{e}^t \end{cases}$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} (t^2/2)\mathrm{e}^t \\ (1 - t^2/2)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

La famille (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Cherchons une solution particulière.

$X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$$X' = A(t)X + B(t) \Leftrightarrow \lambda'(t) \begin{pmatrix} (t^2/2)\mathrm{e}^t \\ (1 - t^2/2)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \mu'(t) \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

$\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = -t$ conviennent

Classique 5 :Résolution d’une equa diff qlq d’ordre n

$E : y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y + b$

étape 1

on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$

donc $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$

étape 2

$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ a_0 y + a_1 y' + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + b \end{pmatrix}$

$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & & & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

$Y' = AY + B$

Classique 6 : **Résolution d'une equa diff d'ordre n à coefficients cte**

Astuce

Pour résoudre une équation diff d'ordre 1 de la forme

$$(E) : y^{(n)}(x)=a_{n-1}.y^{(n-1)}(x) +...+ a_0.y(x) + b(x)$$

étape 1 : On pose (EH) : $y^{(n)}(x) - a_{n-1}.y^{(n-1)}(x) -...- a_0.y(x)=0$

étape 2 : On pose (*) $r^n- a_{n-1}.r^{n-1}-...- a_0.=0$

On cherche r solution de (*) et leur multiplicité

On conclut le système fondamental toutes les fcts $y_1(x)$, ... , $y_n(x)$ de la forme $x^k\ e^{rx}$ avec $0\leq k\leq$multiplicité de r

étape 3 : On conclut que y_H solution générale de (EH) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1 .y_1(x) + ... + \lambda_n .y_n(x)$$: Formule de Lagrange

étape 5 : On conclut que y_P solution particulière de (E) s'écrit

$$y_H(x)=\lambda_1(x) .y_1(x) + ... + \lambda_n (x).y_n(x)$$ (Variation des cte)

étape 6 : On trouve $\lambda_1(x)$, …, $\lambda_n(x)$ grâce à la formule dite de Lagrange ou Liouville

$$\lambda_1'(x) .y_1(x) + ... + \lambda_n' (x).y_n(x) =0$$
$$\lambda_1'(x) .y_1'(x) + ... + \lambda_n' (x).y_n'(x) =0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1'(x) .y_1^{(n-1)}(x) + ... + \lambda_n' (x).y_n^{(n-1)}(x) =0=b(x)$$

étape 7 : On conclut la solution générale de (E) est $y = y_H + y_P$

Exemple 1 : $y^{(4)}(x)- y(x) =x$

(*) : $r^4 – 1 = 0$ => les solutions de (*) : -1, 1, i et -i

système complet : $\{y_1(x) =e^{-x},\ y_2(x) =e^x,\ y_3(x) =e^{ix},\ y_4(x) =e^{-ix}\}$

solution générale de EH : $y_H(x) = ae^{-x}+be^x+ce^{ix} +de^{-ix}$

solution particulière de E : $y_P(x) = a(x)e^{-x}+b(x)e^x+c(x)e^{ix} +d(x)e^{-ix}$

tq $a(x)'e^{-x}+b(x)'e^x+c(x)'e^{ix} +d(x)'e^{-ix} =0$

$a(x)'(e^{-x})'+b(x)' (e^x)'+c(x)'(e^{ix})' +d(x)'(e^{-ix})'=0$

$a(x)'(e^{-x})''+b(x)' (e^x)''+c(x)'(e^{ix})'' +d(x)'(e^{-ix})''=0$

$a(x)'(e^{-x})'''+b(x)' (e^x)'''+c(x)'(e^{ix})''' +d(x)'(e^{-ix})'''=x$

Exemple 2 : $y^{(4)}(x)- 2.y''(x) +y(x)=x^2$

(*) : $r^4 – 2r^2 + 1 = 0$ => $(r^2-1)^2=0$

les solutions de (*) : -1, 1 elles double

système complet : $\{y_1(x) =e^{-x},\ y_2(x) =e^x,\ y_3(x) =x.e^{-x},\ y_4(x) =x.e^x\}$