Préparation aux Concours (CNC)

Probabilités Continues

CNC 2024

Exercice

On pose $I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x} dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-3x} dx$.

1. **a)** Montrer que I_0 est une intégrale convergente et que $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n , $x^n \mathrm{e}^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, I_n est une intégrale convergente.

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n et pour tout réel positif A,

$$\int_0^A x^{n+1} \mathrm{e}^{-3x} dx = \frac{-A^{n+1}}{3} \mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3} \int_0^A x^n \mathrm{e}^{-3x} dx$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = \frac{(n+1)}{3} I_n$.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n , $I_n = \dfrac{n!}{3^{n+1}}$.

5. Soit X la variable aléatoire de densité la fonction f définie par,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

b) Déterminer la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} .$$

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1 : Etude d'une variable aléatoire

On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continue par morceaux est une densité de probabilité si f est positive sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des points de discontinuité de f est une partie finie de $\mathbb{R}$, f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente.

b) Déterminer I_0 en fonction de t, (on pourra faire le changement de variable ($u = x\sqrt{t}$).

c) Déterminer I_1 sous forme d'une expression simple de t.

2. **a)** Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq 2$ et pour tout réel $u \in [0, +\infty[$,

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t} f_t(u) + \frac{n-1}{t} \int_0^u x^{n-2} f_t(x)dx$$

b) En déduire que, pour tout entier n tel que $n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{t} I_{n-2}$.

3. **a)** Montrer que g_t est une densité de probabilité. Dans la suite, on note X_t une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ admettant g_t , pour densité.

b) Déterminer F_t la fonction de répartition de la variable aléatoire X_t .

c) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une espérance $\mathbb{E}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

d) Montrer que la variable aléatoire X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$ et déterminer sa valeur.

e) Déterminer la valeur de t pour que l'écart type $\sigma(X_t)$ de X_t soit egal à 1.

4. Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante :

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a) Déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_k)$.

b) **i)** Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

ii) Montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est une série convergente et déterminer sa somme.

iii) Est ce qu'on peut avoir $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$? Justifier votre réponse.

Corrigé

Quelques rappels sur les variables aléatoires à densité :

- Une variable aléatoire X est dite à densité si il existe une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et admet un nombre fini de points de discontinuité , intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ telle que pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.
- La fonction de répartition de f, notée F_X, est définie par $F_X : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
  Pour tous réels $a \leq b$ on a $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. En tout point x où f est continue on a $F_X'(x) = f(x)$.
- Si la fonction $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors l'espérance de X est donnée par $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.
- Si la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors la variance de X est donnée par
  $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

  et l'écart-type est égale à $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Exercice

1. **a)** On a pour $A \geq 0$ $\displaystyle\int_0^A e^{-3x}dx = \frac{1 - \mathrm{e}^{-3A}}{3}$, donc l'intégrale I_0 converge et $I_0 = \frac{1}{3}$.

b) On sait que, pour tout entier naturel n , $x^{n+2}\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ donc $x^n\mathrm{e}^{-3x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage de l'infinie , donc la fonction $x \mapsto x^n\mathrm{e}^{-3x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'où la convergence de l'intégrale I_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \geq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx &= \int_0^A x^{n+1}\left(\frac{-\mathrm{e}^{-3x}}{3}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{3}\left[x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}\right]_0^A + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^A x^{n+1}\mathrm{e}^{-3x}dx = \frac{-A^{n+1}}{3}\mathrm{e}^{-3A} + \frac{(n+1)}{3}\int_0^A x^n\mathrm{e}^{-3x}dx}$

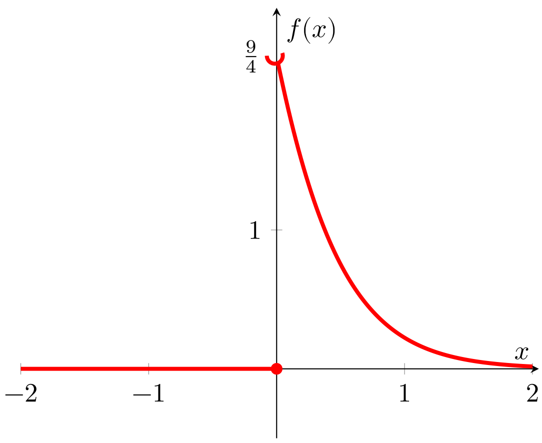
3. Dans la relation précédente on fait tendre un A vers $+\infty$, on obtient pour tout entier naturel n , $\boxed{I_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{3}I_n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. De la question précédente on a

$$I_n = \frac{n}{3}\frac{n-1}{3}\cdots\frac{1}{3}I_0 = \frac{n!}{3^n}\ I_0$$

puisque $I_0 = \frac{1}{3}$ alors $\boxed{I_n = \frac{n!}{3^{n+1}}}$.

5. Soit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9}{4}(1+x)\mathrm{e}^{-3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, dont une représentation graphique :



f est une fonction de densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{9}{4}\left(I_0 + I_1\right) = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 1.$$

a) D'après 1.b) on a $xf(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur $\mathbb{R}$ par suite X admet une espérance .

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \frac{9}{4}\int_0^{+\infty} x(1+x)\mathrm{e}^{-3x}dx \\ &= \frac{9}{4}\left(I_1 + I_2\right) \\ &= \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{27}\right) \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{5}{12}}$.

b) De même la fonction $x \mapsto x^2 f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc X admet une variance .

On a

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{9}{4}\left(I_2 + I_3\right) = \frac{1}{3}$$

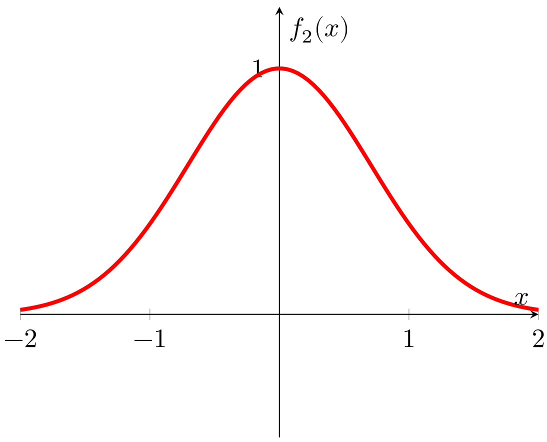
et $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{23}{144}}$.

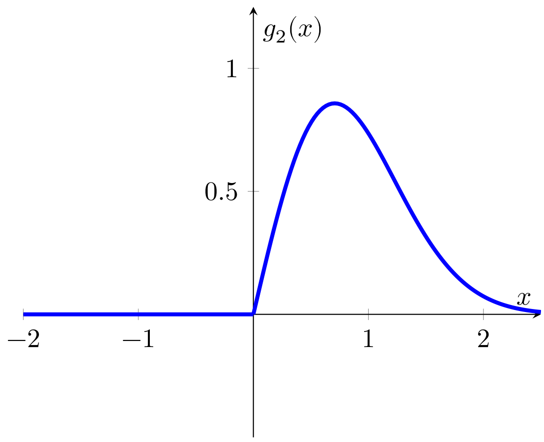
Problème.

Pour tout réel strictement positif t , on considère les deux fonctions f_t et g_t qui sont définies sur $\mathbb{R}$ par,

$$f_t(x) = \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad g_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ txf_t(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Une représentation graphique dans le cas $t = 2$:





Dans toute la suite du problème, on prend t un réel strictement positif

Partie 1: Etude d'une variable aléatoire

1. **a)** Soit $t > 0$. La fonction $x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$, ainsi l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx$ est convergente , pour tout entier n .

b) On a

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \overset{u=x\sqrt{t}}{=} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} du$$

donc $\boxed{I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}}$.

c) On a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx \\ &= \frac{-1}{t} \left(\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-t\frac{A^2}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_1 = \dfrac{1}{t}}$.

2. **a)** Soit $n \geq 2$ et $u \in [0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^u x^n f_t(x)dx &= \int_0^u x^n \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{-1}{t} \int_0^u x^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right)' dx \end{aligned}$$

une intégration par parties donne

$$\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-1}{t}\left[x^{n-1}\mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}\right]_0^u + \frac{n-1}{t}\int_0^u x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

ainsi $\boxed{\int_0^u x^n f_t(x)dx = \frac{-u^{n-1}}{t}f_t(u) + \frac{n-1}{t}\int_0^u x^{n-2}f_t(x)dx}$.

b) Puisque $\frac{-u^{n-1}}{t}f_t(u) \underset{u\to+\infty}{\to} 0$ et les intégrales sont convergentes, alors par passage à la limite on trouve

$$\int_0^{+\infty} x^n f_t(x)dx = \frac{n-1}{t}\int_0^{+\infty} x^{n-2}f_t(x)dx$$

Ainsi pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{I_n = \frac{n-1}{t}I_{n-2}}$.

3. **a)** La fonction g_t est continue positive sur $\mathbb{R}$. Soit $A > 0$ on a

$$\int_{-A}^{A} g_t(x)dx = \int_0^A txf_t(x)dx$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} txf_t(x)dx$ est convergente donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx$ est convergente , par passage à la limite on a

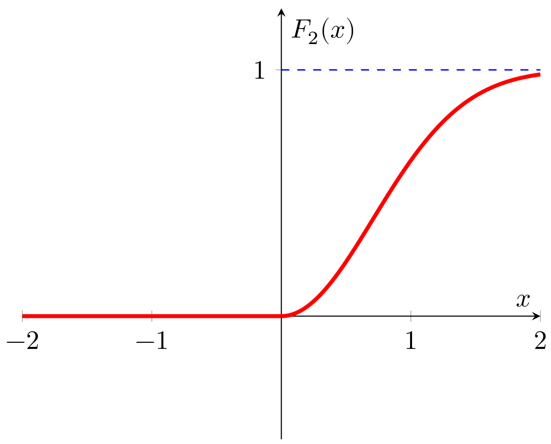
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = \int_0^{+\infty} txf_t(x)dx = tI_1 = 1$$

Ainsi g_t est une densité de probabilité.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_t(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_t(u)du \\ &= \int_0^x tu\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}}du \\ &= \int_0^x -\left(\mathrm{e}^{-t\frac{u^2}{2}}\right)' du \end{aligned}$$

ainsi $\boxed{F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}}$.



c) Pour tout $x \geq 0$, on a $xg_t(x) = tx^2 f_t(x)$ donc la fonction $x \mapsto xg_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par suite X_t admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg_t(x)dx \\ &= t\int_0^{+\infty} x^2 f_t(x)dx \\ &= tI_2 \end{aligned}$$

les questions 2)b) et 1)b) donnent : $I_2 = \frac{1}{t} I_0 = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(X_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2t}}}$.

d) Comme précédemment la fonction $x \mapsto x^2 g_t(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc X_t admet une variance $\mathbb{V}(X_t)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X_t)^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_t(x)dx \\
&= t\int_{0}^{+\infty} x^3 f_t(x)dx \\
&= tI_3
\end{aligned}$$

avec $I_3 = \frac{2}{t} I_1$ et $I_1 = \frac{1}{t}$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left((X_t)^2\right) = \frac{2}{t}}$.

Et on a $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{E}((X_t)^2) - \mathbb{E}(X_t)^2$ donc $\boxed{\mathbb{V}(X_t) = \frac{4-\pi}{2t}}$.

e) On a $\sigma(X_t) = \sqrt{\frac{4-\pi}{2t}}$, donc $\sigma(X_t) = 1$ si et seulement si $\boxed{t = \frac{4-\pi}{2}}$.

4. Pour tout entier naturel k, on note les deux événements A_k et B_k de la façon suivante:

$$A_k = \left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \text{ et } B_k = \left(\sqrt{2k+1} < X_t \leq \sqrt{2k+2}\right)$$

a) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{2k} < X_t \leq \sqrt{2k+1}\right) \\
&= \int_{\sqrt{2k}}^{\sqrt{2k+1}} g_t(x)dx \\
&= F_t(\sqrt{2k+1}) - F_t(\sqrt{2k})
\end{aligned}$$

on sait que $F_t(x) = 1 - \mathrm{e}^{-t\frac{x^2}{2}}$, donc $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \mathrm{e}^{-tk}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}})}$.

De même $\mathbb{P}(B_k) = F_t(\sqrt{2k+2}) - F_t(\sqrt{2k+1})$ et $\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \mathrm{e}^{-t(k+\frac{1}{2})}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}))}$.

b) **i)** La série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-tn}$ est géométrique est convergente donc la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ est convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

ii) De même on a la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(B_n)$ est convergente et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}}$.

iii) Les événements $(A_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

De même on a $(B_k)_{k\geq 0}$ sont deux à deux disjoints et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}}$.

Donc on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$ si et seulement si $t = 0$, ce qui contredit le fait que $t > 0$.

Remarquons que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) > \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) < \frac{1}{2}$ ce qui justifie le résultat .

Les deux réunions ne sont pas complémentaires car $\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{R}^-) = 0$.