

Préparation aux Concours (CNC-CCP)

Espaces Préhilbertiens

Thème 1 : Distances entre Matrices

PARTIE II CALCUL DE LA DISTANCE DE A À $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ET À $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

On pose $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ (c'est la trace du produit de la transposée de A par B).

On rappelle que tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $\forall (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\text{tr}({}^tU) = \text{tr}(U)$ et $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$.

Q1 a) Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$.

b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q2 Rappeler le théorème de "meilleure approximation".

Q3 a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$.

Déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Q4 Calculer $d(A, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où A est la matrice de la partie I. Déduire de I $\|A\|$ et calculer alors $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

PARTIE IV DISTANCE DE A À \mathcal{O}_n .

On est prié de relire les résultats contenus dans III Q 1 a).

Q1 M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et R une matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|RM\| = \|M\|$ ($\|\cdot\|$ est la norme de II).

b) Montrer que $\|MR\| = \|M\|$ (on rappelle que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$).

► Dans la suite de cette partie A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = US$ avec $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = PDP^{-1} = PD^tP$.

Q2 a) Montrer que si Ω appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$.

En déduire que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b) Montrer que $d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ (partir de $\|S - \Omega\|$ et s'inspirer de ce qui précède).

Q3 On pose $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

a) Montrer que $\forall \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \|D\|^2 - 2 \text{tr}(D\Omega) + n = \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \text{tr}(D\Omega) + n$.

b) Soit $\Omega = (\omega_{ij})$ un élément de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\omega_{ij} \in [-1, 1]$.

En déduire que $\text{tr}(D\Omega) \leq \sum_{i=1}^n d_i$.

c) Montrer que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$ et que $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

d) Calculer $d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où A est la matrice de I.

PARTIE V DISTANCE DE A À Δ_p .

p est un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p . A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1 Montrer qu'il existe un élément q_0 de \mathbb{N}^* tel que pour tout élément q de $\llbracket q_0, +\infty \llbracket A - \frac{1}{q} I_n$ soit inversible.

En déduire que $d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R})) = 0$.

Q2 Calculer $d(A, \Delta_p)$.

PARTIE VI DISTANCE DE A À ∇_p .

Q1 **Théorème de Courant et Fischer**

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (C_1, C_2, \dots, C_n) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On suppose que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

k est un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et \mathcal{E}_k est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension k .

On se propose de montrer que : $\lambda_k = \text{Max}_{F \in \mathcal{E}_k} \text{Inf}_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X}$.

a) On pose $F_k = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_k)$. Soit $X = \sum_{i=1}^k x_i C_i$ un élément non nul de F_k . Montrer que $\frac{{}^t X S X}{{}^t X X} \geq \lambda_k$.

Montrer que $\text{Inf}_{X \in F_k - \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X}$ existe et vaut λ_k .

Utiliser ce qui précède pour montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}, \frac{{}^t X S X}{{}^t X X} \geq \lambda_n$.

b) Soit F un élément de \mathcal{E}_k . Montrer que la dimension de $F \cap \text{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ est supérieure ou égale à 1 (on pourra majorer la dimension de la somme).

c) Montrer que si X est un vecteur non nul de $F \cap \text{Vect}(C_k, C_{k+1}, \dots, C_n)$ alors $\frac{{}^t X S X}{{}^t X X} \leq \lambda_k$.

Montrer que $\text{Inf}_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X}$ existe et est inférieur ou égal à λ_k . Conclure.

d) Facultatif Montrer que $\lambda_k = \text{Max}_{F \in \mathcal{E}_k} \text{Min}_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^t X S X}{{}^t X X}$.

Dans toute la suite A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r et p est un élément de \mathbb{N} strictement inférieur à r .

∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p .

Q2 a) Montrer que $\text{Ker } {}^tAA = \text{Ker } A$. En déduire que tAA est de rang r .

b) Montrer qu'il existe une base orthonormée (X_1, X_2, \dots, X_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de tAA respectivement associés à des valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ qui vérifient : $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$ (à un petit abus près lorsque $r = n$).

c) On pose : $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, Y_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} AX_i$. Montrer que (Y_1, Y_2, \dots, Y_r) est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on complétera en une base orthonormée (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si nécessaire.

d) Montrer que $A = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} Y_k {}^tX_k = \sum_{k=1}^r \sqrt{\mu_k} Y_k {}^tX_k$ (on pourra utiliser la base orthonormée (X_1, X_2, \dots, X_n)).

Montrer que $(Y_k {}^tX_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de rang 1.

Q3 On pose $N = \sum_{k=1}^p \sqrt{\mu_k} Y_k {}^tX_k$. Montrer que N appartient à ∇_p et que $\|A - N\| = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n \mu_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^r \mu_k}$

Q4 Soit q un élément de $\llbracket 0, p \rrbracket$ et M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang q .

a) Justifier rapidement l'existence d'une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice ${}^t(A - M)(A - M)$ respectivement associés à des valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qui vérifient : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$.

Calculer $\|A - M\|$.

On pose $G = \text{Ker } M \cap \text{Im}({}^tAA)$ et dans la suite de la question, k est un élément de $\llbracket 1, r - q \rrbracket$.

b) Montrer que $\dim G \geq r - q$.

c) Montrer que si F un sous-espace vectoriel de G de dimension k : $\alpha_k \geq \inf_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tX^t A A X}{{}^tX X}$.

Montrer que $\dim(G \cap \text{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_{k+q})) \geq k$ et en déduire que $\alpha_k \geq \mu_{k+p}$.

Montrer enfin que : $\|A - M\| \geq \|A - N\|$.

d) En déduire $d(A, \nabla_p)$. Et pour $p \in \llbracket r, n \rrbracket$? pour $p = 0$?

Q5 On reprend l'exemple de la partie I. Calculer $d(A, \nabla_p)$ pour tout élément p de $\llbracket 0, 3 \rrbracket$.

Thème 2 : Polynômes Orthogonaux

1 Les polynômes de Legendre

Définition P_n est un polynôme de Legendre de degré n si $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n]$
 $P_n(1) = 1.$

Propriétés

1. $\int_{-1}^1 P_i(x) P_j(x) dx = 0$ si $i \neq j$
2. $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^n (C_n^j)^2 (x-1)^{n-j} (x+1)^j ;$
3. P_n a même parité que n ;

4. Les polynômes P_n satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

5. $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} ;$

4 Les polynômes d'Hermite

Définition $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n [e^{-x^2}] ;$

Propriétés

1. Les fonctions H_n sont polynômiales, de degré n ;
2. $2nH_{n-1}(x) = H'_n(x) ;$
3. Les polynômes H_n satisfont $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0$ si $n \neq m ;$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! ;$
6. Les polynômes H_n satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$;

2 Les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce

Définition Les fonctions de Tchébychev de première (T_n) et seconde (U_n) espèce sont définies sur $I = [-1, 1]$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} T_n(x) = \cos(n\Theta) \\ U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\Theta)}{\sin \Theta} \end{array} \right\} \text{ avec } \Theta = \arccos x.$$

Propriétés

1. Les fonctions T_n satisfont la relation de récurrence à trois termes

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

pour $n \geq 1$ avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$;

2. Les fonctions T_n sont des fonctions polynômes ;

3.

$$T'_n(x) = nU_{n-1}(x) ;$$

4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes ;

5.

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \text{ si } n \neq m ;$$

6.

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} ;$$

7.

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right],$$

pour $x \in]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$;

8. Le coefficient du terme de plus haut degré de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$ et 1 pour $n = 0$;

9. Les polynômes T_n satisfont l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0 ;$$

PARTIE I

Q1) Soit H une matrice symétrique (et réelle) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 1°) H est diagonalisable
 2°) il existe une base orthonormale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de H .
 3°) il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 telles que $\rightarrow P$ est inversible et $P^{-1} = {}^t P$
 $\rightarrow D = P^{-1} H P = {}^t P H P$.

Q2) • $H = {}^t A A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 • ${}^t H = {}^t ({}^t A A) = {}^t A ({}^t A) = {}^t A A = H$, H est symétrique. $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 • Soit λ une valeur propre de H . $\exists X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $H X = \lambda X$.

$${}^t X {}^t A A X = {}^t X H X = {}^t X (\lambda X) = \lambda {}^t X X = \lambda \langle X, X \rangle_n \quad \lambda = \frac{{}^t (A X) A X}{\langle X, X \rangle_n} = \frac{\langle A X, A X \rangle_n}{\langle X, X \rangle_n}$$

\uparrow
 $X \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$\langle A X, A X \rangle_n \geq 0$ et $\langle X, X \rangle_n > 0$.
 Ainsi $\lambda \geq 0$.

Alors $H = {}^t A A$ est symétrique, réelle et ses valeurs propres sont positives.

$H = {}^t A A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Q3) a) $H = {}^t A A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Observons que $H - I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ d'ac $\text{rg}(H - I_3) = 1 < 3$.

Ainsi 1 est valeur propre de H et d'ac $\dim \text{SEP}(H, 1) = 3 - \text{rg}(H - I_3) = 2$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. $H X = X \Leftrightarrow (H - I_3)(X) = 0 \Leftrightarrow 5x + 5y + 5z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$.

$\text{SEP}(H, 1)$ est le plan vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'équation $x + y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons que, par exemple, $\text{SEP}(H, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

H est symétrique et réelle. Elle est donc diagonalisable et ses sous-espaces sont orthogonaux.

Comme $1 \in Sp(H)$ et $\dim SEP(H, 1) = 2$, H possède une racine de valeur propre α et $SEP(H, \alpha) = SEP(H, 1)^\perp$, OK?

$SEP(H, 1)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$ dans la base canonique de $\pi_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est orthogonale. Alors $SEP(H, \alpha)$ est la droite vectorielle engendrée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ On vérifie que } H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+5+5 \\ 5+6+5 \\ 5+5+6 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi } \alpha = 16.$$

Finalement $Sp H = \{1, 16\}$, $SEP(H, 1) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $SEP(H, 16) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Construisons une base orthogonale de $SEP(H, 1)$... on peut aussi utiliser (on peut aussi utiliser la méthode de Schmidt).

Soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in SEP(H, 1)$. $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix}$ ($z = -x-y$).

x est orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $x-y=0$. Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur de $SEP(H, 1)$ orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est lui-même un vecteur de $SEP(H, 1)$.

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $SEP(H, 1)$.

Comme $\dim SEP(H, 1) = 2$, c'est une base orthogonale de $SEP(H, 1)$.

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \|_3 = \sqrt{2} \text{ et } \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|_3 = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}. \text{ Notons que } \| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|_3 = \sqrt{3}$$

Alors $B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $SEP(H, 1)$ et

$B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $SEP(H, 16)$.

Comme $\pi_{3,1}(\mathbb{R}) = SEP(H, 1) \oplus SEP(H, 16)$, $B_1 \cup B_2$ est une base orthogonale de $\pi_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de H respectivement associés aux valeurs propres 1, 1 et 16.

$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $\pi_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de H respectivement associés aux valeurs propres 1, 1 et 16.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 , (\mathcal{R}) à la base \mathcal{B} .

$$19 \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}HP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

20 Permissible et $P^{-1} = {}^tP$ car \mathcal{C} est la matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

Ainsi $\mathcal{C} = P^{-1}HP = {}^tP^{-1}H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

b) Pour $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Diagonale, ses coefficients sont positifs ou nuls et $D^2 = \mathcal{C}$!

c) $S = PDP^{-1} = PD {}^tP$. $S \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^tS = {}^t(PD {}^tP) = {}^t({}^tP) {}^tD {}^tP = PD {}^tP = S$

Ainsi $S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. $S = PDP^{-1}$ donc S et D sont semblables.

Alors $S_p(S) = S_p(D) = \{1, 4\}$; les valeurs propres de S sont donc positives.

cela signifie alors que S est inversible et $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

$$U = AS^{-1} = A(PDP^{-1})^{-1} = A(P^{-1})^{-1} D^{-1} P = APD^{-1}P^{-1} = APD^{-1} {}^tP.$$

$${}^tUU = {}^t(AS^{-1})AS^{-1} = {}^tS^{-1} {}^tAAS^{-1} = ({}^tS)^{-1} H S^{-1} = S^{-1} H S^{-1}. \quad {}^tUU = S^{-1} H S^{-1}.$$

$${}^tUU = S^{-1} H S^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} H (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} H PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1} D^2 D^{-1} P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$$

$(PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

 $\leftarrow P^{-1}HP = \mathcal{C} = D^2$

${}^tUU = I_3$ donc $U \in O_3(\mathbb{R})$. De plus $U = AS^{-1}$ donc $A = US$.

Ainsi $A = US$ avec $U \in O_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$.

$$U = APD^{-1} {}^tP = A \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$U = A \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II

Q1) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E .

Soit $x \in E$.

Il existe $\min_{y \in F} \|x - y\|$.

et $\exists ! y \in F, \|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|$. y est la projection orthogonale de x sur F .

Q2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est l'orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$\min_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - S\|$ existe et vaut $\|A - A'\|$ où A' est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \min_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - S\| = \min_{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \|A - S\| = \|A - A'\|.$$

De même $d(A, \mathcal{B}_n(\mathbb{R})) = \|A - A''\|$ où A'' est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA). \quad \left(\frac{1}{2}(A + {}^tA) \right) = \frac{1}{2}({}^tA + A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA); \quad \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

$$\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA) \right) = \frac{1}{2}({}^tA - A) = -\frac{1}{2}(A - {}^tA); \quad \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R}).$$

Alors $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ avec $\frac{1}{2}(A + {}^tA) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - {}^tA) \in \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{B}_n(\mathbb{R})$, $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

$$A' = \frac{1}{2}(A + {}^tA) \text{ et } A'' = \frac{1}{2}(A - {}^tA).$$

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|A - A'\| = \|A''\| = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^tA) \right\|. \quad d(A, \mathcal{B}_n(\mathbb{R})) = \|A - A''\| = \|A'\| = \left\| \frac{1}{2}(A + {}^tA) \right\|.$$

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - {}^tA) \right\| \text{ et } d(A, \mathcal{B}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A + {}^tA) \right\|.$$

Q3) $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A + {}^tA) \right\|$. $A' = \frac{1}{2}(A + {}^tA) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\|A'\|^2 = \text{Tr}({}^tA' A') = \text{Tr}((A')^2) = \text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 8. \quad d(A, \mathcal{B}_3(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}.$$

$$d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \|A''\|^2 = \|A\|^2 - \|A'\|^2 = \text{Tr}(A^2) - 8 = 18 - 8 = 10. \quad d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \sqrt{10}.$$

(Q1) Soit P et Q deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

$${}^t(PQ)PQ = {}^tQ {}^tP P Q = {}^tQ I_n Q = {}^tQ Q = I_n. \text{ De même } PQ {}^t(PQ) = I_n.$$

Ainsi $PQ \in O_n(\mathbb{R})$.

$${}^tP P = I_n \text{ d'où } P \text{ est inversible et } P^{-1} = {}^tP.$$

$$\text{Alors } {}^tP^{-1}P^{-1} = {}^t({}^tP)P = P+P = I_n = {}^tP P = {}^tP {}^t({}^tP) = P^{-1} {}^tP^{-1}; P^{-1} \in O_n(\mathbb{R}).$$

Le produit de deux éléments de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.

L'inverse d'un élément de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.

b) Soit P un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Posons $Q = P+P = 2P$.

$${}^tQ Q = {}^t(2P)(2P) = 4 {}^tP P = 4 I_n; Q \notin O_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable pour $+$ (et pour \cdot); $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace

vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

Remarque.. on aurait également pu observer que $O_{n,n}(\mathbb{R}) \not\subset O_n(\mathbb{R})$.

(Q2) Posons $W = (w_{ij})$ et ${}^tW W = (\sigma_{ij})$.

$$a) \forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^n w_{ki} w_{kj} = (w_{k1} \dots w_{kn}) \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ \vdots \\ w_{nj} \end{pmatrix} = {}^tC_i C_j.$$

$$\forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, {}^tC_i C_j = \sigma_{ij}.$$

$$\text{Rappelons que } (\sigma_{ij}) = {}^tW W = D^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2).$$

$$\text{Alors } \forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, {}^tC_i C_j = \sigma_{ij} = \begin{cases} d_i^2 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$\forall i \in \overline{1,n}, {}^tC_i C_i = d_i^2 \text{ et } \forall (i,j) \in \overline{1,n} \times \overline{1,n}, i \neq j \Rightarrow {}^tC_i C_j = 0.$$

$$\forall i \in \overline{1,n}, d_i = 0 \Rightarrow d_i^2 = 0 \Rightarrow {}^tC_i C_i = 0 \Rightarrow \|C_i\|_n^2 = 0 \Rightarrow C_i = 0_{n,n}(\mathbb{R}).$$

$$\forall i \in \overline{1,n}, d_i = 0 \Rightarrow C_i = 0_{n,n}(\mathbb{R}).$$

b) 1^{er} cas.. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i = 0$. Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit (F_1, \dots, F_n) une base orthonormale quelconque de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = 0 = 0 F_i = d_i F_i.$$

2^{ème} cas.. $J = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid d_i \neq 0\} \neq \emptyset$.

$$\text{Posons } \forall i \in J, F_i = \frac{1}{d_i} C_i. \forall i \in J, \langle F_i, F_i \rangle_n = \frac{1}{d_i^2} \langle C_i, C_i \rangle_n = 1.$$

$$\forall (i, j) \in J^2, i \neq j \Rightarrow \langle F_i, F_j \rangle_n = \frac{1}{d_i} \frac{1}{d_j} \langle C_i, C_j \rangle_n = 0.$$

Pour conclure $(F_i)_{i \in J}$ est une famille orthonormale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $J = \llbracket 1, n \rrbracket, (F_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base orthonormale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = d_i F_i$. Supposons $I \neq \llbracket 1, n \rrbracket$. Posons $J = \llbracket 1, n \rrbracket - I$.

Il existe alors une famille orthonormale $(F_i)_{i \in J}$ qui complète $(F_i)_{i \in I}$ en une base orthonormale.

Alors $(F_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base orthonormale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\forall i \in I, C_i = d_i F_i. \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket - I, d_i = 0 \text{ donc } C_i = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})} = 0 \cdot F_i = d_i F_i.$$

$$\text{Finalement } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = d_i F_i$$

↑
multiplication
par 0 !

Donc dans tous les cas on a montré qu'il existe une base orthonormale (F_1, F_2, \dots, F_n) de

$$\underline{\underline{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}} \text{ telle que } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_i = d_i F_i.$$

c) F est une matrice orthogonale car c'est la matrice de passage d'une base orthonormale (la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$) à une base orthonormale (la base (F_1, \dots, F_n)). Ainsi $F \in O_n(\mathbb{R})$.

Notons (E_1, \dots, E_n) la base canonique de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons que $m_i \in \mathbb{R} \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, R E_j$ et la $j^{\text{ème}}$ colonne de \mathbb{R} .

$$\text{Ainsi } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j = \mathbb{W} E_j \stackrel{=}{=} F D E_j = F(d_j E_j) = d_j F E_j = d_j F_j = C_j.$$

↑ $j^{\text{ème}}$ colonne de D ↑ $j^{\text{ème}}$ colonne de F

Onc $\forall j \in \{1, n\}, W E_j = C_j = (FD) E_j$.

Pour tout $j \in \{1, n\}$, les $j^{\text{e}} \text{ colonnes}$ de W et FD sont identiques

Ainsi $W = FD$.

③ a) Hermitique, réelle et à valeurs propres positives ou nulles.
 Alors il existe une matrice P de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$
 telle que :
$$\begin{cases} \Delta = P^{-1} H P = {}^t P H P \\ \forall k \in \{1, n\}, s_k \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = {}^t P H P = {}^t P {}^t A A P = {}^t P {}^t A P P^{-1} A P = {}^t P {}^t A P {}^t P A P = {}^t ({}^t P A P) ({}^t P A P)$$

Repète une matrice P de $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ de $\Pi_n(\mathbb{R})$
 dont les coefficients sont positifs ou nuls et telle que : $\Delta = {}^t P H P = {}^t ({}^t P A P) ({}^t P A P)$.

Pour $\forall i \in \{1, n\}, d_i = \sqrt{s_i}$ et $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Alors $D \in \Pi_n(\mathbb{R}), D^2 = \Delta$ et D est diagonale à coefficients positifs ou nuls.

Repète une matrice diagonale D de $\Pi_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls
 telle que : ${}^t ({}^t P A P) ({}^t P A P) = D^2$.

b) Pour $W = {}^t P A P, W \in \Pi_n(\mathbb{R}), W = D^2$ et D est diagonale à coefficients positifs ou nuls.

d'après ① : $\exists F \in O_n(\mathbb{R}), W = F D$.

Alors ${}^t P A P = F D$; $A = P F D {}^t P = (P F {}^t P) (P D {}^t P)$.

$A = (P F {}^t P) (P D {}^t P)$. Pour $U = P F {}^t P = P F P^{-1}$ et $S = P D {}^t P = P D P^{-1}$.

Le produit de trois éléments de $O_n(\mathbb{R})$ donne un élément de $O_n(\mathbb{R})$.

$S \in \Pi_n(\mathbb{R})$ et ${}^t S = {}^t (P D {}^t P) = {}^t ({}^t P) {}^t D {}^t P = P {}^t D {}^t P = P D {}^t P = S$; $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 \uparrow est diagonale

$S = P D P^{-1}$, S et D sont semblables donc $S_p(S) = S_p(D) = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^+$

Ainsi $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors $A = U S$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

PARTIE IV Distance de A à \mathcal{O}_n

(Q1) a) $\|R\pi\|^2 = \text{Tr}({}^t(R\pi)R\pi) = \text{Tr}(\underbrace{{}^t\pi}^T R \pi) = \text{Tr}({}^t\pi\pi) = \|\pi\|^2$.

$\|R\pi\| = \|\pi\|$

In cas $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) $\|\pi R\|^2 = \text{Tr}({}^t(\pi R)\pi R) = \text{Tr}(\pi R {}^t(\pi R)) = \text{Tr}(\pi R {}^t R {}^t \pi) = \text{Tr}(\pi {}^t \pi) = \|\pi\|^2$

$\|\pi R\| = \|\pi\|$

" $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ "

$U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{O}1$.

(Q2) a) soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $\|A - R\| = \|US - R\| = \|U(S - U^{-1}R)\| = \|S - U^{-1}R\|$.

$\forall R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|A - R\| = \|S - U^{-1}R\|$

→ soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $U^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $U^{-1}R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ comme produit de deux éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq \|S - U^{-1}R\| \leq \|A - R\|$.

$\forall R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq \|A - R\|$

Alors $d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq \inf_{R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|A - R\| = d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

→ soit $R' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Posons $R = UR'$; $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $R' = U^{-1}R$.

$d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq \|A - R\| = \|S - U^{-1}R\| = \|S - R'\|$.

$\forall R' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq \|S - R'\|$ donc $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \leq d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

Finalement $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

Remarque... la puissance égale est due à la relation ψ qui est une bijection.

$\psi: \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une bijection.

$R \mapsto U^{-1}R$

b) $\forall R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|S - R\| = \|PDP^{-1} - R\| = \|P(D - P^{-1}R)P^{-1}\|$

Rappelons que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Alors:

$\forall R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|S - R\| = \|P(D - P^{-1}R)P^{-1}\| = \|D - P^{-1}R\|$.

$\uparrow P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$\uparrow P^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Pour $\forall R \in O_n(\mathbb{R})$, $\hat{\Psi}(R) = P^{-1} R P$ et $\check{\Psi}(R) = P R P^{-1}$

$\hat{\Psi}$ est une application de $O_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$ car le produit de trois éléments de $O_n(\mathbb{R})$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$. $\check{\Psi}$ est également une application de $O_n(\mathbb{R})$ dans $O_n(\mathbb{R})$.

De plus $\forall R \in O_n(\mathbb{R})$, $\check{\Psi}(\hat{\Psi}(R)) = P(P^{-1} R P)P^{-1} = R$ et $\hat{\Psi}(\check{\Psi}(R)) = P^{-1}(P R P^{-1})P = R$.

$\check{\Psi} \circ \hat{\Psi} = \hat{\Psi} \circ \check{\Psi} = \text{Id}_{O_n(\mathbb{R})}$. $\hat{\Psi}$ est une bijection.

Alors $\{ \|D - P^{-1} R P\|; R \in O_n(\mathbb{R}) \} = \{ \|D - R\|; R \in O_n(\mathbb{R}) \}$

Donc $\inf_{R \in O_n(\mathbb{R})} \|D - P^{-1} R P\| = \inf_{R \in O_n(\mathbb{R})} \|D - R\|$. Rappelons que $\forall R \in O_n(\mathbb{R})$, $\|S - R\| = \|D - P^{-1} R P\|$.

Alors $\inf_{R \in O_n(\mathbb{R})} \|S - R\| = \inf_{R \in O_n(\mathbb{R})} \|D - R\| = \dots$. Ainsi $d(S, O_n(\mathbb{R})) = d(D, O_n(\mathbb{R}))$

Remarque... on pourrait aussi le vérifier en procédant comme dans a) ↓

(Q3) a) Soit $R \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\|D - R\|^2 = \|D\|^2 - 2 \langle D, R \rangle + \|R\|^2 = \text{Tr}({}^t D D) - 2 \text{Tr}({}^t D R) + \text{Tr}({}^t R R).$$

$$\|D - R\|^2 = \text{Tr}(D^2) - 2 \text{Tr}(D R) + \text{Tr}(I_n) = \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \text{Tr}(D R) + n$$

$D^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \dots, d_n^2)$.

$$\forall R \in O_n(\mathbb{R}), \|D - R\|^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \text{Tr}(D R) + n.$$

b) Soit $R = (\omega_{ij})$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. ${}^t R R = I_n$.

Alors $\forall i \in \{1, n\}$, $\sum_{k=1}^n \omega_{ki} \omega_{ki} = 1$. et $(\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, i \neq j \Rightarrow \sum_{k=1}^n \omega_{ki} \omega_{kj} = 0)$

$$\forall i \in \{1, n\}, \sum_{k=1}^n \omega_{ki}^2 = 1.$$

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, \omega_{ij}^2 \leq \sum_{k=1}^n \omega_{ki}^2 = 1; \forall (i, j) \in \{1, n\}^2, |\omega_{ij}| \leq 1.$$

$$\forall (i, j) \in \{1, n\}^2, \omega_{ij} \in [-1, 1].$$

Posons $L = (l_{ij}) = DR$ et $D = (d_i)$ $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Tr}(DR) = \text{Tr}(L) = \sum_{i=1}^n l_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n d_{ik} w_{ki} = \sum_{i=1}^n d_i w_{ii}$$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_i \geq 0$ et $w_{ii} \leq 1$. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_i w_{ii} \leq d_i$.

Alors $\text{Tr}(DR) = \sum_{i=1}^n d_i w_{ii} \leq \sum_{i=1}^n d_i$.

$\forall R \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, $\text{Tr}(DR) \leq \sum_{i=1}^n d_i$.

c) Soit $R \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$.

$$\|D - R\|^2 = \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2\text{tr}(DR) + n \geq \sum_{k=1}^n d_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n d_k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$\|D - R\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (d_k - 1)^2 \stackrel{\text{OK?}}{=} \text{Tr}((D - I_n)^2) = \text{Tr}((D - I_n)(D - I_n)) = \|D - I_n\|^2$$

\uparrow
D est diagonale

Donc $\|D - R\| \geq \|D - I_n\|$.

$\forall R \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$, $\|D - I_n\| \leq \|D - R\|$ et $I_n \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$.

Ainsi $\min_{R \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})} \|D - R\|$ existe et vaut $\|D - I_n\|$.

$R \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$

Alors $d(D, \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

$d(A, \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

$P \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$ et $P^{-1} \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$

$$\|A - U\| = \|(US - U)\| = \|U(S - I_n)\| = \|S - I_n\| = \|PDP^{-1} - I_n\| = \|P(D - I_n)P^{-1}\| = \|D - I_n\|$$

\uparrow
 $U \in \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})$

Alors $d(A, \mathcal{O}_s(n, \mathbb{R})) = \|A - U\|$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A - U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; $(A - U)(A - U) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$\|A - U\|^2 = 9$; $\|A - U\| = 3$. $d(A, \mathcal{O}_s(3, \mathbb{R})) = 3$. (on passe à l'égalité en utilisant $\|D - I_n\|$...).

PARTIE V

Q1) Rappelons que le spectre de A est un ensemble fini; $\text{Sp } A \cap \mathbb{R}_+^*$ égalent.

1^{er} cas... $\text{Sp } A \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$. Soit λ_0 le plus petit élément de $\text{Sp } A \cap \mathbb{R}_+^*$.

Alors $\exists \lambda_0 \in \mathbb{C} \cap \text{Sp } A = \emptyset$; $\forall \lambda \in]0, \lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

2nd cas... $\text{Sp } A \cap \mathbb{R}_+^* = \emptyset$. Alors $\text{Sp } A \cap]0, +\infty[= \emptyset$. Soit λ_0 un

élément quelconque de \mathbb{R}_+^* ; $\forall \lambda \in]0, \lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

Dans les deux cas : $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \lambda \in]0, \lambda_0[$, $A - \lambda I_n$ est inversible.

Prenons $q_0 = E(\frac{1}{\lambda}) + 1$. $q_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{1}{\lambda} < q_0$; $\frac{1}{q_0} < 1$.

$\forall q \in [q_0, +\infty[$, $0 < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{q_0} < \lambda$. $\forall q \in [q_0, +\infty[$, $A - \frac{1}{q} I_n$ est inversible.

$\exists q_0 \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in [q_0, +\infty[$, $A - \frac{1}{q} I_n$ est inversible.

$\forall q \in [q_0, +\infty[$, $A - \frac{1}{q} I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\forall q \in [q_0, +\infty[$, $0 \leq d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R})) \leq \|A - (A - \frac{1}{q} I_n)\| = \frac{1}{q} \|I_n\|$.

En faisant tendre q vers $+\infty$ on voit : $0 \leq d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R})) \leq 0$.

Ainsi $d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R})) = 0$.

Q2) $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \Delta_p$ donc $d(A, \Delta_p) \leq d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Alors $0 \leq d(A, \Delta_p) \leq d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R})) = 0$.

Donc $d(A, \Delta_p) = 0$.

Remarque... $\forall q \in [q_0, +\infty[$, $\|A - (A - \frac{1}{q} I_n)\| = \frac{1}{q} \|I_n\|$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} \|I_n\| = 0$.

Alors on peut dire que 1^o. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| < \varepsilon$.

2^o. $(A - \frac{1}{q} I_n)_{q \geq q_0}$ est une suite d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A .

Ceci exprime que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\Pi_n(\mathbb{R})$.

PARTIE VI

Q1) a) soit $x = \sum_{i=1}^p x_i c_i$ un élément non nul de F .

$$Sx = \sum_{i=1}^p x_i S c_i = \sum_{i=1}^p x_i \lambda_i c_i. \text{ Comme } (c_1, c_2, \dots, c_n) \text{ est une base orthonormale,}$$

$$\langle Sx, x \rangle = \sum_{i=1}^p (x_i \lambda_i) x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2.$$

$$\text{Ainsi } \langle x, Sx \rangle = \langle Sx, x \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^p \lambda_R x_i^2 = \lambda_R \|x\|^2 = \lambda_R \langle x, x \rangle.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_R. \quad \forall x \in F - \{0\}, \quad \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_R.$$

$$\text{Or pour que } c \in F - \{0\} \text{ et } : \frac{\langle c, S c \rangle}{\langle c, c \rangle} = \frac{\langle c, (\lambda_R c) \rangle}{\langle c, c \rangle} = \lambda_R \frac{\langle c, c \rangle}{\langle c, c \rangle} = \lambda_R.$$

$$\text{Ainsi } \lambda_R = \min_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} = \inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

$$\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \text{ existe et vaut } \lambda_R. \quad (*) \text{ omission ... suite après la b)}$$

$$b) n \geq \dim(F \cap \text{Vect}(c_1, \dots, c_n)) = \underbrace{\dim F}_R + \underbrace{\dim \text{Vect}(c_1, \dots, c_n)}_{n - (k-1)} - \dim(F \cap \text{Vect}(c_1, \dots, c_n))$$

$$n \geq R + n - k + 1 - \dim(F \cap \text{Vect}(c_1, \dots, c_n))$$

$$\text{Ainsi } \dim(F \cap \text{Vect}(c_1, \dots, c_n)) \geq R + n - k + 1 - n = 1.$$

la dimension de $F \cap \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ est supérieure à 1.

(*) suite de a). En appliquant le résultat démontré pour $k = n$ il vient :

$$\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} = \lambda_n. \text{ Donc } \forall x \in F - \{0\}, \quad \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_n.$$

$$\text{Or } F_n = \text{Vect}(c_1, \dots, c_n) = \Pi_{n,1}(\mathbb{R}). \text{ Ainsi } \forall x \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R} - \{0\}), \quad \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_n.$$

c) soit $x = \sum_{i=k}^n x_i c_i$ un élément non nul de $F \cap \text{Vect}(c_k, c_{k+1}, \dots, c_n)$.

$$Sx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i c_i. \quad \langle x, Sx \rangle = \langle x, Sx \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha_i \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \leq \lambda_B \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

↑
(c_1, c_2, \dots, c_n) est une BON

$$\text{Ainsi } \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{\lambda_B \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \lambda_B.$$

Si x est un élément non nul de $F \cap \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n)$, $\frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_B$.

donc $(F \cap \text{Vect}(c_1, c_2, \dots, c_n)) \neq \emptyset$. Or $\exists x_0 \in F - \{0\}$, $\frac{\langle x_0, Sx_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leq \lambda_B$.

$\forall x \in F - \{0\}$, $\frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_n$ (d'après a)). Alors $\left\{ \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} ; x \in F - \{0\} \right\}$ est une

partie non vide et minorée de \mathbb{R} ; elle possède une borne inférieure.

Ainsi $\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle}$ existe. De plus $\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \frac{\langle x_0, Sx_0 \rangle}{\langle x_0, x_0 \rangle} \leq \lambda_B$.

Par conséquent $\forall F \in \mathcal{E}_B$, $\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_B = \inf_{x \in F_2 - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle}$ et $F_2 \in \mathcal{E}_B$.

ceci suffit pour dire que $\lambda_B = \max_{F \in \mathcal{E}_B} \inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle}$.

d) Une piste ! doit $F \in \mathcal{E}_B$.

Remarque que 1° $\inf_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle x, Sx \rangle}{\langle x, x \rangle} = \inf_{x \in F \cap \{x' \in \pi_{n,d}(\mathbb{R}) \mid \|x'\| = 1\}}$

2° $F \cap \{x' \in \pi_{n,d}(\mathbb{R}) \mid \|x'\| = 1\}$ est un fermé borné de $\pi_{n,d}(\mathbb{R})$

3° $x \mapsto \langle x, Sx \rangle$ est continue sur $F \cap \{x' \in \pi_{n,d}(\mathbb{R}) \mid \|x'\| = 1\}$

4° $\text{Idatiffia } \pi_{n,d}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$!

5° cadence avec la course.

Q2) Soit $X \in \text{Ker } A$. $AX = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$; ${}^t A AX = 0_{\Pi_{n,2}(\mathbb{R})}$; $X \in \text{Ker } {}^t A A$.

Soit $X \in \text{Ker } {}^t A A$. ${}^t A AX = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$; ${}^t X {}^t A AX = 0$; ${}^t (AX) AX = 0$; $\|AX\|^2 = 0$; $\|AX\| = 0$.

Alors $AX = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$; $X \in \text{Ker } A$.

Finalement $\text{Ker } {}^t A A = \text{Ker } A$.

A et ${}^t A A$ sont deux éléments de $\Pi_n(\mathbb{R})$. Alors $\text{rg } A = n - \dim \text{Ker } A = n - \dim \text{Ker } {}^t A A = \text{rg } {}^t A A$.

$\text{rg } {}^t A A = \text{rg } A$.

b) D'après la première partie ${}^t A A$ est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives.

Soient $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q$ les valeurs propres ^{distinctes} de ${}^t A A$ rangées dans l'ordre décroissant.

$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_q > 0$.

$\Pi_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\substack{i \in \{1, q\}}^{\perp}} \text{SEP}({}^t A A, \delta_i)$. Pour tout $i \in \{1, q\}$, soit B_i une base

orthonormale de $\text{SEP}({}^t A A, \delta_i)$.

$B = \bigcup_{i=1}^q B_i$ est une base orthonormale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. x_1, x_2, \dots, x_n sont des valeurs propres de ${}^t A A$.

Pour tout $i \in \{1, n\}$, notons μ_i la valeur propre associée à x_i .

Comme $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_q$, par construction de B : $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n$.

1^{er} cas... $r < n$. Alors 0 est valeur propre de ${}^t A A$ et $\dim \text{SEP}({}^t A A, 0) = n - r$.

Par conséquent. $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_{q-1} > \delta_q = 0$

• B_q contient $n - r$ éléments

• pour tout $i \in \{1, r\}$, x_i est associé à une valeur propre non nulle.

Alors $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$.

2^{ème} cas $r = n$. 0 n'est pas valeur propre de ${}^t A A$. $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_q > 0$.

Ainsi $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r = \mu_n > 0$

soit un couple de cas (x_1, x_2, \dots, x_n) et une base orthogonale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de tAA respectivement associés à des valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ qui vérifient $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = \mu_{r+2} = \dots = \mu_n = 0$.

c) soit $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2$.

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} (AX_i)^t \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} AX_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}} X_i^t (AA) X_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_i} \sqrt{\mu_j}} X_i^t (\mu_j X_j)$$

$$\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle = \frac{\sqrt{\mu_j}}{\sqrt{\mu_i}} X_i^t X_j = \frac{\sqrt{\mu_j}}{\sqrt{\mu_i}} \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ car } (X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est}$$

une base orthogonale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$ est une famille orthogonale de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on compléte à une

base orthogonale $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$... si nécessaire ← dans le cas où $r < n$.

d) soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. $\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} (\gamma_k^t X_i) X_i = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \langle X_k, X_i \rangle \gamma_k = \sqrt{\mu_i} \gamma_i = AX_i$

$$(\gamma_k^t X_i) X_i = \gamma_k (X_k^t X_i) = (X_k^t X_i) \gamma_k \quad \left\langle X_k, X_i \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$

si $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$: $\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} (\gamma_k^t X_i) X_i = \sqrt{\mu_i} \gamma_i = AX_i$.

si $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$: $\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} (\gamma_k^t X_i) X_i = \sqrt{\mu_i} \gamma_i = 0 = AX_i$
 \uparrow $\mu_i = 0$ \uparrow $X_i \in \text{Ker } tAA = \text{Ker } A$.

Finalement $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} (\gamma_k^t X_i) X_i = AX_i$

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $(\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \gamma_k^t X_i - A) X_i = 0_{\Pi_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme (X_1, X_2, \dots, X_n) est

une base de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ on peut alors dire que $\text{Ker} (\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \gamma_k^t X_k - A) = \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \gamma_k^t X_k - A = 0_{\Pi_n(\mathbb{R})}$.

Finalement $A = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \gamma_k^t X_k = \sum_{k=1}^r \sqrt{\mu_k} \gamma_k^t X_k$

Soit $(i, j) \in \overline{1, n}^2$.

$$\langle \gamma_i^t X_i, \gamma_j^t X_j \rangle = \text{Tr} \left({}^t(\gamma_i^t X_i) \gamma_j^t X_j \right) = \text{Tr} \left(X_i ({}^t \gamma_i \gamma_j) {}^t X_j \right).$$

$$\langle \gamma_i^t X_i, \gamma_j^t X_j \rangle = \text{Tr} \left(\underbrace{\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle_n}_{=1} X_i {}^t X_j \right) = \langle \gamma_i, \gamma_j \rangle_n \text{Tr} (X_i {}^t X_j).$$

Si $i \neq j$: $\langle \gamma_i, \gamma_j \rangle_n = 0$ d'ac $\langle \gamma_i^t X_i, \gamma_j^t X_j \rangle = 0$.

Supposons $i = j$. $\langle \gamma_i^t X_i, \gamma_j^t X_j \rangle = \text{Tr} (X_i {}^t X_i)$. Posons $X_i = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$.

$$X_i {}^t X_i = \begin{pmatrix} t_1 t_1 & t_1 t_2 & \dots & t_1 t_n \\ t_2 t_1 & t_2 t_2 & \dots & t_2 t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_n t_1 & t_n t_2 & \dots & t_n t_n \end{pmatrix}; \text{Tr} (X_i {}^t X_i) = \sum_{\ell=1}^n t_\ell^2 = \|X_i\|_n^2 = 1.$$

Ainsi $\forall (i, j) \in \overline{1, n}^2$, $\langle \gamma_i^t X_i, \gamma_j^t X_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

$(\gamma_k^t X_k)_{k \in \overline{1, n}}$ est une famille orthogonale de $\Pi_n(\mathbb{R})$.

Soit $k \in \overline{1, n}$. Posons $X_k = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\gamma_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\gamma_k^t X_k = (\delta_i u_j)$.

Pour tout $j \in \overline{1, n}$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de $\gamma_k^t X_k$ est $u_j \gamma_k$; le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\gamma_k^t X_k$ est $\text{Vect}(u_1 \gamma_k, u_2 \gamma_k, \dots, u_n \gamma_k)$ c'est à dire $\text{Vect}(\gamma_k)$ car $\exists j_0 \in \overline{1, n}$, $u_{j_0} \neq 0$ puisque X_k n'est pas nulle. γ_k n'étant pas nulle, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de $\gamma_k^t X_k$ est 1. Ainsi $\text{rg}(\gamma_k^t X_k) = 1$.

$\forall k \in \overline{1, n}$, $\text{rg}(\gamma_k^t X_k) = 1$.

Q3) $N \in \Pi_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Im } N = \text{Im} \left(\sum_{\ell=1}^p \sqrt{f_\ell} \gamma_\ell^t X_\ell \right) \subseteq \sum_{\ell=1}^p \text{Im}(\sqrt{f_\ell} \gamma_\ell^t X_\ell) \stackrel{p_\ell \neq 0 \text{ pour } \ell \in \overline{1, p}}{\downarrow} \sum_{\ell=1}^p \text{Im}(\gamma_\ell^t X_\ell)$$

Ainsi $\dim \text{Im } N \leq \dim \left(\sum_{\ell=1}^p \text{Im}(\gamma_\ell^t X_\ell) \right) \leq \sum_{\ell=1}^p \dim(\text{Im}(\gamma_\ell^t X_\ell)) = \sum_{\ell=1}^p 1 = p$.

Alors $\text{rg } N \leq p$. Ainsi $N \in \nabla_p$. ↑ dimension n ?

$$\|A-N\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sqrt{f_k} \gamma_k^t x_k - \sum_{k=1}^p \sqrt{f_k} \gamma_k^t x_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n \sqrt{f_k} \gamma_k^t x_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n (\sqrt{f_k})^2}$$

Par conséquent $\|A-N\| = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n f_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^r f_k}$. $(\gamma_1^t x_1, \gamma_2^t x_2, \dots, \gamma_n^t x_n)$ est une famille orthogonale.

(Q1) a) ${}^t(A-N)(A-N)$ est, d'après B, une matrice symétrique de $\Pi_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

* Il existe une base orthogonale de $\Pi_n, |\mathbb{R}|$ constituée de vecteurs propres de ${}^t(A-N)(A-N)$ respectivement associés aux valeurs propres $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$.
 En adjoignant les vects $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ dans l'axe des ordonnées et abscisses de construire une base orthogonale de $\Pi_n, |\mathbb{R}|$ constituée de vecteurs propres de ${}^t(A-N)(A-N)$ respectivement associés à des valeurs propres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ qui vérifient $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$.

${}^t(A-N)(A-N)$ est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $\text{tr}({}^t(A-N)(A-N)) = \text{tr} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

Alors $\|A-N\| = \sqrt{\langle A-N, A-N \rangle} = \sqrt{\text{tr}({}^t(A-N)(A-N))} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$.

$\|A-N\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$

b) $n \geq \dim(K_n \cap I_n({}^tAA)) = \dim K_n \cap \dim I_n({}^tAA) - \dim(K_n \cap I_n({}^tAA))$.

$n \geq (n - \dim \Pi) + \dim({}^tAA) - \dim G$; $\dim G \geq n - q + r - n = r - q$.

$\dim G \geq r - q$

c) Soit F un sous-espace vectoriel de G de dimension k.

D'après le théorème de Courant et Fischer: $\alpha_k = \max_{F \in \mathcal{E}_k} \inf_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tX({}^t(A-N)(A-N))X}{{}^tXX}$.

Alors $\alpha_k \geq \inf_{X \in F - \{0\}} \frac{{}^tX({}^t(A-N)(A-N))X}{{}^tXX}$

Soit $X \in F - \{0\}$. $X \in K_n \cap \Pi$. Alors $(A-N)X = AX$ et ${}^tX({}^t(A-N)(A-N))X = {}^tX({}^t(A-N)X) = {}^t(AX)X = {}^tXAX$.

Ainsi $\frac{{}^tX({}^t(A-N)(A-N))X}{{}^tXX} = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

$$\text{Alors } \inf_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{t_X (t(A-\pi)(A-\pi)X)}{t_{XX}} = \inf_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{t_X t_{AA} X}{t_{XX}}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\alpha_k \geq \inf_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{t_X t_{AA} X}{t_{XX}}.}}$$

$$\begin{aligned} v_i &\in \{1, \dots, r\}, y_i \neq 0 \\ v_i &\in \{r+1, \dots, n\}, y_i = 0 \\ &\downarrow \\ &= \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r). \end{aligned}$$

$$\text{Im } t_{AA} = \text{Vect}(t_{AA}x_1, t_{AA}x_2, \dots, t_{AA}x_n) = \text{Vect}(y_1x_1, y_2x_2, \dots, y_r x_r) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_r).$$

$$\text{Alors } G \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}) = K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, \dots, x_r) \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q})$$

$$G \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}) = K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}) \quad (k+q \leq r)$$

$$n \geq \dim(K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q})) = \dim K \cap \pi + \dim \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}) - \dim(K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}))$$

$$n \geq (n-q) + (k+q) - \dim(K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}))$$

$$\text{Alors } \dim(K \cap \pi \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q})) \geq k.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\dim(G \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q})) \geq k.}}$$

On peut alors trouver un sous-espace vectoriel F de $G \cap \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q})$ de dimension k .

D'après ce qui précède $\alpha_k \geq \inf_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{t_X t_{AA} X}{t_{XX}}$. Soit x un élément non nul de F .

$$x \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k+q}). \exists (\beta_1, \dots, \beta_{k+q}) \in \mathbb{R}^{k+q}, x = \sum_{i=1}^{k+q} \beta_i x_i. t_{AA} x = \sum_{i=1}^{k+q} \beta_i y_i x_i.$$

$$t_X t_{AA} X = \langle x, t_{AA} x \rangle = \sum_{i=1}^{k+q} \beta_i^2 y_i \geq \sum_{i=1}^{k+q} \beta_i^2 y_{k+q} = \|x\|^2 y_{k+q} = t_{XX} y_{k+q}.$$

(x₁, x₂, ..., x_{k+1}) et une base orthogonale

$$\text{Alors } \forall X \in F \setminus \{0\} \quad \frac{t_X t_{AA} X}{t_{XX}} \geq y_{k+q}; \quad \inf_{X \in F \setminus \{0\}} \frac{t_X t_{AA} X}{t_{XX}} \geq y_{k+q}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\alpha_k \geq y_{k+q}.}}$$

Ceci vaut pour tout k dans $\{1, \dots, r-q\}$.

$$\text{Alors } \|A-\pi\|^2 = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell \geq \sum_{\ell=1}^{r-q} \alpha_\ell \geq \sum_{\ell=1}^{r-q} y_{\ell+q} = \sum_{\ell=q+1}^r y_\ell \geq \sum_{\ell=p+1}^r y_\ell = \|A-N\|^2$$

$v_i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i \geq 0$ $q \leq p$ et $v_i \in \{1, \dots, r\}, y_i > 0$

Ainsi $\|A - \pi\| \geq \|A - N\|$.

d) nous venons de voir que $\pi \in \mathbb{O}, p\mathbb{I}$ est une matrice de $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$ de rang q alors $\|A - \pi\| \geq \|A - N\|$.

Alors $\forall \pi \in \mathbb{D}_p$, $\|A - \pi\| \geq \|A - N\|$. Or $N \in \mathbb{D}_p$.

Ainsi $\|A - N\| = \min_{\pi \in \mathbb{D}_p} \|A - \pi\|$; $\|A - N\| = d(A, \mathbb{D}_p)$.

Finalement $d(A, \mathbb{D}_p) = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n \mu_k} = \sqrt{\sum_{k=p+1}^r \mu_k}$.

Q5) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\mu_1 = 36$ et $\mu_2 = \mu_3 = 1$.

Alors $d(A, \mathbb{D}_0) = \sqrt{36 + 1 + 1} = \sqrt{38} = 3\sqrt{2}$.

$d(A, \mathbb{D}_1) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

$d(A, \mathbb{D}_2) = \sqrt{1} = 1$.

$d(A, \mathbb{D}_3) = 0$.

Si $p \in \mathbb{O}, n\mathbb{I}$, $A \in \mathbb{D}_p$
et $d(A, \mathbb{D}_p) = 0$.

Si $p = 0$, $\mathbb{D}_p = \{0\}$;
 $d(A, \mathbb{D}_p) = \|A\| = \sqrt{\text{Tr}(AA^T)}$

$d(A, \mathbb{D}_p) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \mu_k}$

Au cas général :

$\forall p \in \mathbb{O}, n\mathbb{I}$, $d(A, \mathbb{D}_p) = \sqrt{\sum_{k=p+1}^n \mu_k}$