TD : Réduction

Exercice 1 : Rang d'un bloc triangulaire

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.
   Établir que : $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$.

2. Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$
   Montrer que : $\text{rg}(M) = n + \text{rg}(C)$.
   Indic : Multiplier M par une matrice bloc pour se ramener au cas précédent.

3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.
   Montrer que : $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$.
   Indic : Multiplier M par une matrice bloc pour se ramener au cas précédent.

4. Montrer que ce résultat est encore vrai, si C est inversible, et A non inversible.
   Indic : On pourra se ramener au cas précédent à l'aide de permutations.

5. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = I_2$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   A-t-on $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$.

6. **Cas général** : On reprend les notations de la question 3), sans aucune condition sur A ou C.
   On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(K) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ (X, Y) & \longmapsto & (AX + BY, CY) \end{array}$.

   a. Vérifier que f est bien définie et linéaire.

   b. On pose $F = \{f(X, 0) \mid X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}$. Montrer que $\dim F = \text{rg}(A)$.

   c. On pose $\text{rg}(C) = r$ et on considère $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_r)$ une base de $\text{Im}(C)$, donc il existe des colonnes $Y_i \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ tel que $C.Y_i = Z_i$.
   On pose $G = \text{Vect}\,(f(0, Y_1), f(0, Y_2), \ldots, f(0, Y_r))$.
   Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$. En déduire que $\text{rg}(M) \geqslant \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$

Exercice 2 : Rang d'une concaténation

☞ On rappelle que pour toute matrice M si $C_1, \cdots, C_n$ sont les colonnes de M, alors $\text{Im}(M) = \text{Vect}(C_1, \cdots, C_n)$.

☞ Dans tout l'exercice : $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On note $(A\ B) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.

   a. Montrer que $\text{Im}(A) \subset \text{Im}(A\ B)$.

   b. On suppose que $\exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = AU$.

      i. Montrer que $\text{Im}(A\ B) = \text{Im}(A)$.

      ii. En déduire que $\text{rg}(A\ B) = \text{rg}(A)$.

   c. On suppose maintenant que $\text{rg}(A\ B) = \text{rg}(A)$.

      i. Montrer que $\text{Im}(A\ B) = \text{Im}(A)$.

      ii. Dire pourquoi les colonnes de B appartiennent toutes à $\text{Im}(A)$.

   d. En déduire que : $\text{rg}(A\ B) = \text{rg}(A) \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B = AU$.

2. On note $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
   Montrer que : $\text{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \text{rg}(A) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $C = VA$.

3. En déduire que :
   $\text{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rg}(A) \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : Quelques Densités Utiles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$. On a bien $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$.

1. On suppose que A est nilpotente, Montrer que : $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
2. On suppose A non nilpotente. On pose $\varepsilon = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{0\}\}$.
   - a. Justifier que ε est bien défini et non nul.
   - b. Montrer que pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$.
4. Soit T une matrice triangulaire supérieure. On pose $\lambda_i = t_{i,i}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_k = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{n}{k}\right)$.
   Autrement dit : T_k est une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont les $\mu_i = \lambda_i + \frac{i}{k}$. Il est clair que $\lim_{k\to+\infty} T_k = T$.
5. Montrer que pour tout $j \neq i$, on a $\lambda_i = \lambda_j \Rightarrow \mu_i \neq \mu_j$.
6. On suppose que $\exists j \neq i$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$.
   On pose alors $\varepsilon = \min\left\{\frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|i-j|} \text{ tel que } i \neq j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j\right\}$.
   - a. Justifier que ε est bien défini et non nul.
   - b. Montrer que pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $\mu_i \neq \mu_j$ pour tout $i \neq j$
7. En déduire que T_k est diagonalisable à partir d'un certain indice.
8. En déduire que $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable}\}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
   Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists A_k \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$.
9. En déduire que $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{T}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ trigonalisable}\}$.
   Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{T}(\mathbb{R}), \exists A_k \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$.

Exercice 4 : Déterminant d'une matrice par blocs

Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

1. On suppose que $CD = DC$.
   - a. On suppose de plus que D est inversible.
     Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$.
     ☞ **Indication** : Utiliser la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix}$
   - b. Montrer que le résultat de la question précédente est encore valable même si D n'est pas inversible.
     ☞ **Indication** : Utiliser le résultat de l'exo 3, question 3), ainsi que la continuité de l'application $A \mapsto \det(A)$.
2. On prend $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Discuter la validité de la formule $\det(M) = \det(AD - BC)$ dans le cas général.
3. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.
   Discuter la validité de la formule $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Exercice 5 : Matrice de rang 1 (Classic CCINP-CNC)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
On admet le résultat suivant (déjà vu en TD) : $A^2 = \mathrm{Tr}(A).A$

1. Montrer que A est diagonalisable $\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
2. Montrer que 0 est une valeur propre de A de multiplicité au moins $n-1$.
3. En déduire que $\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.
4. En déduire que $\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Tr}(A)$.

Exercice 6 : Démonstration Topologique de Cayley-Hamilton

1. Montrer que $\chi_D(D) = 0$ pour toute matrice diagonale.
2. En déduire que $\chi_A(A) = 0$, pour toute matrice A diagonalisable.
3. Montrer la continuité de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & P(A) \end{array}$.
4. En déduire la continuité de l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \chi_A(A) \end{array}$.
5. En déduire que $\chi_A(A) = 0$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

☞ **Indication** : Utiliser le résultat de l'exo 3, question 8), ainsi que la continuité de l'application $\psi : A \mapsto \chi_A(A)$.

Exercice 7 : Un Grand Classic (Tous les concours)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose que A est inversible.
   - a. Montrer que AB et BA sont semblables
   - b. En déduire que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
2. Montrer que le résultat de la question 1.b) est encore valable même si A n'est pas inversible.

☞ **Indication** : Utiliser le résultat de l'exo 3, question 3), ainsi que la continuité de l'application $\psi : A \mapsto \chi_A(X)$.

3. **Une autre méthode :**
   On pose : $M = \begin{pmatrix} BA & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & -B \\ 0 & AB \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$.
   - a. Calculer MP et PN.
   - b. En déduire que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

Exercice 8 : Quelques formules simples mais utiles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $(a, b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^*$.

1. On suppose que A est inversible.
   - a. Montrer que : $\chi_{A^{-1}}(X) = \dfrac{(-X)^n}{\det(A)} \chi_A\left(\dfrac{1}{X}\right)$.
   - b. Exprimer les $\mu \in \mathrm{sp}\left(A^{-1}\right)$ en fonction des $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$.
2. - a. Montrer que : $\chi_{A^2}(X^2) =' -1)^n \chi_A(X)\chi_A(-X)$.
   - b. Exprimer les $\mu \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}}\left(A^2\right)$ en fonction des $\lambda \in \mathrm{sp}_C(A)$.

   ☞ **Indication** : On pourra utiliser que $\forall \mu \in \mathbb{C}$, $\exists z \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = z^2$.
3. - a. Montrer que : $\chi_{a.A+b.I_n}(X) = a^n \chi_A\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$.
   - b. Exprimer les $\mu \in \mathrm{sp}\left(a.A + b.I_n\right)$ en fonction des $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, de a et de b.

Exercice 9 : Diagonalisation à l'aide de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $A.\left(\mathrm{com}(A)\right)^T = \det(A).I_n$.
Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, fixée mais quelconque.

1. Montrer que toutes les colonnes de $\left(\mathrm{com}(A - \lambda I_n)\right)^T$ appartiennent à $E_\lambda(A)$.
   Indication : $AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}B \subset \ker A$.
2. On suppose que $\chi_A(X)$ scindé à racines simples.
   - a. Montrer que $\mathrm{Im}\left[\left(\mathrm{com}(A - \lambda I_n)\right)^T\right] = E_\lambda(A)$.
   - b. En déduire que $E_\lambda(A)$ est une droite engendrée par une colonne non nulle de $\left(\mathrm{com}(A - \lambda I_n)\right)^T$.
3. En utilisant ce qui précède, diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 : Déterminant tridiagonale (Classic CCINP-CNC)

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On pose $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}$

On rappelle (déjà vu en TD) que : $\Delta_n - a\Delta_{n-1} + bc\Delta_{n-2} = 0$.

Matrice de Chebychev : $T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a : $\chi_{T_n}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$

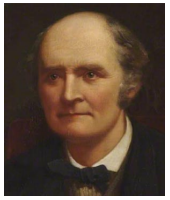
   ☞ **Indication** : On pourra utiliser que $\chi_{T_0}(X) = 1$

2. En déduire les valeurs propres de T_n.

3. Pour chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(T_n)$,
   déterminer ses vecteurs propres associés, $X = (x_k)_{1\le k\le n}$.

   ☞ **Indication** : On pourra utiliser que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

4. Justifier pourquoi T_n est diagonalisable, puis la diagonaliser.



Arthur Cayley (1821-1895) : Mathématicien britannique, il a exercé comme avocat pendant quatorze ans pour subvenir à ses besoins tout en publiant des centaines d'articles.
Il est connu pour avoir fondé la théorie des matrices et posé les bases de la théorie abstraite des groupes.

Exercice 11 : Matrice compagnon (Classic Tous les concours)

Á tout polynôme unitaire $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}_n[X]$, on associe la matrice suivante, noté C_P, et appelée **matrice compagnon** de P :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.

   ☞ **Indication** : Utiliser l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + X.L_2 + \cdot + X^{n-1}L_n$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(C_P)$, on a $\dim E_\lambda(C_P) = 1$.

   ☞ **Indication** : Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(C_P)$,
   on pourra supposer que $x_0 = x_{n+1} = 0$.

3. En déduire que C_P est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $P(X)$ est scindé à racines simples.

4. On suppose dans cette question que C_P est diagonalisable.

   a. Dire pourquoi $(C_P)^T$ est aussi diagonalisable.

   b. Dire comment diagonaliser $(C_P)^T$.

   c. En déduire comment diagonaliser C_P.



William Rowan Hamilton (1805–1865) : Mathématicien, physicien et Đastronome irlandais.
Il maîtrisait plus d'une dizaine de langues dès son plus jeune âge
Il es connu pour avoir fondé la mécanique hamiltonienne et avoir inventé les quaternions.

Exercice 12 : Endomorphisme cyclique (Classic Tous les concours)

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit endomorphisme **cyclique** ssi
$\exists x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On suppose dans toute la suite que u est un endomorphisme cyclique.

1. Montrer que $(\mathrm{Id}_E, u, \cdots, u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
2. En déduire que $\deg(\pi_u) \geqslant n$.
3. En déduire que $\pi_u = \chi_u$.
4. Justifier l'existence de scalaire $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ tel que $P(u)(x_0) = 0$,
où $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$.

   ☞ **Indication** : Utiliser que $u^n(x_0) \in E = \mathrm{Vect}(x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$.

5. En déduire que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = C_P$.
Autrement dit : la matrice d'un endomorphisme cyclique dans une base bien choisie est une matrice compagnon.
6. En déduire que que $\chi_u(X) = P(X)$.
7. Montrer que $\chi_u(u)\left(u^j(x_0)\right) = 0$ pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$
8. En déduire que $\chi_u(u) = 0$.
Autrement dit : On a démontré le théorème de Cayley-Hamilton dans le cas particulier des endomorphismes cycliques.
9. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_v(X)$ est scindé à racines simples.
On pose $\mathrm{sp}(v) = \{\lambda_i, \cdots, \lambda_n\}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$.
On note $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, les vecteurs propres associés.
Autrement dit : $v(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
Finalement, on pose $x_0 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$.

   a. Montrer que $(x_0, v(x_0), \cdots, v^{n-1}(x_0))$ est libre dans E.

      ☞ **Indication** : On pourra utiliser les propriétés de la matrice de Van Der Monde, vues en TD.

   b. En déduire que v est cyclique.

Exercice 13 : Diagonalisation Simultanée (Classic tous les Concours)

Vocabulaire :

☞ Deux **endomorphismes** $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont dits **simultanément diagonalisables**, si elles sont diagonalisable et admettent une base propre commune.

☞ Deux **matrices** $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dits **simultanément diagonalisables**, si elles sont diagonalisables et semblables à deux matrices diagonales à l'aide de la même matrice de passage.

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$.
On pose : $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$.
Montrer que u et v sont simultanément diagonalisables $\Leftrightarrow$ M et N le sont aussi.
2. Montrer que si deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont simultanément diagonalisables, alors leurs somme $M + N$ et produit $M.N$ sont aussi diagonalisables et même simultanément diagonalisables.
3. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Vérifier que M et N sont diagonalisables.

   b. Vérifier que $M + N$ et MN ne le sont pas.

   c. Conclure.

4. **Cas particulier** : On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que χ_u est scindé à racines simples.

   a. Dire pourquoi u est diagonalisable.

   b. Dire pourquoi $\dim E_\lambda(u) = 1$, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$.
   On pose $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ et $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}\{\varepsilon_i\}$.

   c. Dire pourquoi $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est une base de E.

   d. Justifier que $v(\varepsilon_i) \in E_{\lambda_i}(u)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

   e. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \alpha_i$ tel que $v(\varepsilon_i) = \alpha_i.\varepsilon_i$.

   f. Conclure que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 14 : Diagonalisation Simultanée (Suite)

Cas général : On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que u et v sont diagonalisable.
On pose $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour tout $i \neq j$.

1. Dire pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$.
2. Dire pourquoi chaque $E_i = E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v.
3. En déduire que chaque $v_{|E_i}$ est diagonalisable.
4. En déduire que $v_{|E_i}$ et $u_{|E_i}$ sont simultanément diagonalisables
5. Conclure que u et v sont simultanément diagonalisables.

Exercice 15 : Extrait Oral Mines-Telecom (2026)

Notations :

- E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
- $u \in \mathcal{L}(E)$, quelconque mais fixé.
- On définit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tel que : $\forall v \in \mathcal{L}(E), f(v) = u \circ v$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Sp}(u)$.
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ une projection sur $E_\lambda(u)$.
   Montrer que $f(v) = \lambda.v$.
3. En déduire que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(u)$.
4. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.
   Montrer que $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$.
5. En déduire que u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ f est diagonalisable.
6. Montrer que u et f ont le même polynôme minimal.

Exercice 16 : Endomorphismes Nilpotents (Classic CCINP-CNC)

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$. On suppose u nilpotent d'indice p

1. Montrer que $u \circ v$ est nilpotent d'indice inférieur p.
2. On suppose v nilpotent d'indice q.
   Montrer que $u + v$ est nilpotent d'indice $p + q - 1$.
3. Montrer que $\mathrm{Id}_E - u \in \mathrm{GL}(E)$ et que $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$.
4. En déduire que si $v \in \mathrm{GL}(E)$, alors $v + u \in \mathrm{GL}(E)$.
   Exprimer dans ce cas $(v + u)^{-1}$ en fonction de u et v.
5. On suppose ici u nilpotent d'indice $n = \dim E$.
   a. Justifier l'existence de $x_0 \in E$ tel que $u^n(x_0) = 0_E$ et $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
   b. Montrer que $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \cdots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
   c. En déduire que u est cyclique.
   d. Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exercice 17 : Extrait Oral CCINP (2026)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{sp}(A)$, on a : $\dfrac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{z - \lambda_i}$.
3. En cas de convergence, en déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Tr}(A^k) z^k$.

Exercice 18 : Décomposition de Dunford (Classic tous les Concours)

Notations

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.
- On pose $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$, où les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de u, et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 1$ leurs multiplicités respectives.
- On note, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $F_i = \ker\left((u-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}\right)$.
- On rappelle que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
- Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on note p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$.
- $\sum_{i=1}^{r} p_i = \mathrm{id}_E$. Chaque p_i est un polynôme en u.
- $p_i(x_i) = x_i$ pour tout $x_i \in F_i$.
- $p_j(x_i) = 0_E$ pour tout $x_i \in F_i$ et $j \neq i$.

(1) On pose $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . p_i$.

[a] Montrer que pour tout $x_i \in F_i$, on a $v(x_i) = \lambda_i . x_i$.

[b] Soit $\mathcal{B}$ base adaptée à la somme $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
Justifier que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale.

[c] En déduire que v est diagonalisable.

[d] Dire pourquoi v est un polynôme en u.

[e] Montrer que $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

Exercice 19 : Décomposition de Dunford (suite)

(1) On pose $w = u - v$.

[a] Vérifier que $w = \sum_{i=1}^{r}(u-\lambda_i \mathrm{id}_E)\circ p_i$.

[b] Dire pourquoi chaque F_i est stable par w.

[c] Justifier que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a : $w_{|F_i} = u - \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$

[d] En déduire que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a : $w_{|F_i}^{\alpha_i} = 0_E$.

[e] En déduire que $w^{\alpha} = 0$, où $\alpha = \max\left(\alpha_i\right)_{1\leqslant i\leqslant r}$.
Autrement dit w est nilpotent.

(2) [a] Dire pourquoi w est un polynôme en u.

[b] En déduire que v et w commutent.

Décomposition de Dunford (Existence) : Tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\chi_u(X)$ est scindé s'écrit sous la forme $u = v + w$ tel que :

- v diagonalisable et w nilpotent.
- v et w sont des polynômes en u donc commutent.
- $\chi_u(X) = \chi_v(X)$.

(3) **Unicité de la décomposition de Dunford.**
On suppose que u admet une autre décomposition de Dunford : $u = v' + w'$.

[a] Dire pourquoi $v - v'$ est diagonalisable.
- **Indication** : On pourra utiliser les résultats de l'exercice 14.

[b] Dire pourquoi $w' - w$ est nilpotent.
- **Indication** : On pourra utiliser les résultats de l'exercice 16.

[c] En déduire que $v = v'$ et $w = w'$.
Autrement dit : la décomposition de Dunford est unique.

FiN