TD : Intégration sur un Intervalle Quelconque

Exercice 1 : Exemples d'Étude de Convergence d'Intégrales

Étudier la convergence des intégrales suivantes (En cas de besoin on pourra utiliser les résultats de convergence des intégrales de Bertrand).

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,\mathrm{dx}$	2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,\mathrm{dx}$	3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$
4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{dx}$	5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{dx}$	6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\,\mathrm{dx}$
7) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\ln(x+1)-\ln 2}{x^2-1}\,\mathrm{dx}$	8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha-1}{\ln t}\,\mathrm{dt}$	9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{dx}$
10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t+t^2e^{-t}}\,\mathrm{dt}$	11) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{dt}$	12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\,\mathrm{dx}$
13) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^2}^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)(\ln\ln t)}\,\mathrm{dt}$	14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\lvert\ln t\rvert^\beta}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{dt}$	15) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt[3]{t}+\cos(t)}\,\mathrm{dt}$
16) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,\mathrm{dt}$	17) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$	18) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha-t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{dt}$
19) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{dt}$	20) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\arccos t}\,\mathrm{dt}$	21) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}$

Exercice 2 : Règle d'Abel

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
   Indication : IPP
2. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ selon les valeurs du paramètre réel α.

Exercice 3 : Intégrales de Frullani

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ continue, $\lim\limits_{x\to+\infty} = \ell \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ et $0 < \varepsilon < A$.

1. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que
   $$\int_\varepsilon^A \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{aA} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\varepsilon}^{bA} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$
2. En déduire que $\displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$
3. On pose $J(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$
   - **a** Montrer que $J(\varepsilon) = \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\mathrm{d}u + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).$
   - **b** Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\mathrm{d}u = 0.$
     Indication : $\forall\alpha>0\ \exists\beta>0$ tel que $|u|<\beta \Rightarrow |f(u)-f(0)|<\alpha$.
4. On pose $J(A) = \displaystyle\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$
   - **a** Montrer que $J(A) = \displaystyle\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u + \ell\ln\left(\frac{b}{a}\right).$
   - **b** Montrer que $\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_{aA}^{bA} \frac{f(u)-\ell}{u}\,\mathrm{d}u = 0.$
     Indication : $\forall\alpha>0\ \exists\beta>0$ tel que $u>\beta \Rightarrow |f(u)-\ell|<\alpha$.
5. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = (\ell-f(0))\ln\left(\frac{b}{a}\right).$

Exercice 4 : Intégrales de Frullani (suite)

En déduire la convergence et la valeur des intégrales suivantes :
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2t)-\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 : Intégrale de Gauss

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ converge.

   On rappelle ce résultat du Td : $\displaystyle w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{dt} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque mais fixé.

   Montrer que $\displaystyle\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$

   Indication : $\ln(1+x) \leq x$, pour tout réel $x > -1$

3. En déduire que $\sqrt{n}I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} \leqslant \sqrt{n}.J_n$,

   où $\displaystyle I_n = \int_0^1 (1-u^2)^n \mathrm{du}$ et $\displaystyle J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^n}\mathrm{du}$.

4. Établir que $I_n = w_{2n+1}$, puis en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. On pose $\displaystyle K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+u^2)^n}\mathrm{du}$. Dire pourquoi K_n est bien défini.

   Établir que $K_n = w_{2n-2}$, puis en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}K_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Montrer que $0 \leqslant K_n - J_n \leqslant \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7. Conclure enfin que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 6 : Fonction Gamma d'Euler

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $\displaystyle\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\Gamma(x)$ converge ssi $x > 0$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Montrer $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

   Indication : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
5. En déduire une formule générale pour $\displaystyle\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



Niels Henrik Abel (1802–1829) :
Mathématicien norvégien, Normalien. Il doit subvenir seul aux besoins de sa famille dès l'âge de 18 ans après le décès de son père.
il meurt de la tuberculose à 26 ans.
Son nom est associé au prix Abel, l'équivalent du prix Nobel.



Giuliano Frullani (1795–1834) : Mathématicien et ingénieur italien con
ses travaux sur le calcul intégral.
Il devient professeur à l'Université de Pise à 19 ans

FiN