Préparation CB : Algèbre Linéaire

Partie A : Rang d'un endomorphisme (Les Classics)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finie, et $u, v : E \to E$ linéaires.

1. **a** Montrer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
   b En déduire que $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
   c Montrer que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0_E\} \implies \ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$.
   d En déduire que $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0_F\} \\ \ker(u) + \ker(v) = E \end{cases}$
2. **a** Montrer que $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v)$.
   b Montrer que $\begin{cases} \mathrm{Im}(u+v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0_F\} \\ \ker(u+v) + \ker(v) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u) \\ \ker(u) \subset \ker(v) \end{cases}$
   c En déduire que $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u) \\ \ker(u) \subset \ker(v) \end{cases}$.
   d En déduire une condition nécessaire pour avoir $|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| = \mathrm{rg}(u+v)$.
3. On suppose que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \ker(u) + \ker(v) = E$.
   Montrer que les deux sommes sont directes.
4. On suppose que : $u \circ v = 0, \quad u + v \in GL(E)$.
   Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.
5. On suppose que $u^3 = 0$.
   a Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(E)$.
   b Montrer que $2\mathrm{rg}(u^2) \leq \mathrm{rg}(u)$.
   ☞ **Indication :** On pourra appliquer le théorème du rang à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$.
6. **a** Montrer que $\dim \ker(u \circ v) \leq \dim \ker(u) + \dim \ker(v)$.
   ☞ **Indication :** On pourra appliquer le théorème du rang à $u_{|\mathrm{Im}(v)}$.
   b Montrer que $\dim(\mathrm{Im}(u) \cap \ker(v)) = \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v \circ u)$.
   ☞ **Indication :** On pourra appliquer le théorème du rang à $v_{|\mathrm{Im}(u)}$.
   c Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - \dim E \leq \mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

Partie B : Projecteurs (Les Classics)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p, q deux projecteur de E.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ p = p \circ u \Leftrightarrow \ker p$ et Im sont stables par u.
3. On suppose que $\ker p = \ker q$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$.
   a Montrer que $q \circ p = q$ et $p \circ q = p$
   b En déduire que $r = \lambda p + (1-\lambda)q$ est un projecteur.
   c Vérifier que $\ker(r) = \ker(p)$ et que $\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.
   d Donner une CNS pour avoir $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Que peut-on conclure.
4. Montrer que : $p \circ q = q \iff \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$.
5. Montrer que : $p + q$ est un projecteur $\iff p \circ q = 0,\ q \circ p = 0$,
   et que dans ce cas : $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\},\ \ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$
6. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.
   Montrer que $g \circ f$ est une projecteur et que : $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ et $\ker(g \circ f) = \ker(f)$.

FiN

Corrigé

Partie A : Rang d'un endomorphisme (Les Classics)

1 **a** Soit $y \in \text{Im}(u+v)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$.
Comme $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $v(x) \in \text{Im}(v)$, on a $y \in \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.

b De l'inclusion précédente, on déduit :

$$\begin{aligned} rg(u+v) &= \dim(\text{Im}(u+v)) \\ &\leq \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) \\ &= \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) - \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \\ &\leqslant \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Im}(v)) \\ &= \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \end{aligned}$$

c ☞ L'inclusion $\ker u \cap \ker v \subset \ker(u+v)$ est toujours vraie.
En effet : si $x \in \ker u \cap \ker v$, alors $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0 + 0 = 0$.

☞ Réciproquement, soit $x \in \ker(u+v)$. Alors $u(x) + v(x) = 0_F$,
d'où $u(x) = -v(x)$. Ainsi $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $u(x) = -v(x) \in \text{Im}(v)$, donc $u(x) \in \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$. Ainsi, $u(x) = 0_F$ et $v(x) = -u(x) = 0_F$, ce qui prouve que $x \in \ker u \cap \ker v$.

d ☞ **Sens direct** ($\Longrightarrow$) : Selon la démonstration de la question 1.b) si on a $\text{rg}(u+v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$, alors $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$.
Puisque $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$, d'après la question 1.c,
on sait que : $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$.
D'autre part :

$$\begin{aligned} \dim E &= \text{rg}(u+v) + \dim(\ker(u+v)) \\ &= (\dim E - \dim\ker u) + (\dim E - \dim\ker v) + \dim(\ker u \cap \ker v) \\ &= 2\dim E - (\dim\ker u + \dim\ker v - \dim(\ker u \cap \ker v) \\ &= 2\dim E - \dim(\ker u + \ker v) \end{aligned}.$$

Ainsi $\dim E = \dim(\ker u + \ker v)$ avec $(\ker u + \ker v) \subset E$ (en dimension finie), d'où l'égalité.

☞ **Sens réciproque** ($\Longleftarrow$) : Comme $\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$, d'après la question 1.c, on a : $\ker(u+v) = \ker(u) \cap \ker(v)$. Or $E = \ker u + \ker v$
Donc : $\dim E = \dim(\ker u + \ker v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim(\ker u \cap \ker v)$.
Donc $\dim E = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim\ker(u+v)$.
Donc $\dim\ker(u+v) = \dim\ker u + \dim\ker v - \dim E$
Finalement :

$$\begin{aligned} \text{rg}(u+v) &= \dim E - \dim\ker(u+v) \\ &= \dim E - (\dim\ker u + \dim\ker v - \dim E) \\ &= 2\dim E - \dim\ker u - \dim\ker v \\ &= (\dim E - \dim\ker u) + (\dim E - \dim\ker v) \\ &= \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \end{aligned}$$

2 **a** En écrivant $u = (u+v) + (-v)$, la sous-additivité du rang donne :

$$\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u+v) + \text{rg}(-v) = \text{rg}(u+v) + \text{rg}(v) \implies \text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u+v)$$

Par symétrie des rôles de u et v, on obtient $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u+v)$.

b ☞ **Montrons** $\ker(u) \subset \ker(v)$:
Soit $x \in \ker(u)$, c'est-à-dire $u(x) = 0_F$, donc $(u+v)(x) = v(x)$. Ainsi, $v(x) \in \text{Im}(u+v)$, donc $v(x) \in \text{Im}(u+v) \cap \text{Im}(v) = \{0_F\}$. Ceci prouve que $x \in \ker(v)$, d'où $\ker(u) \subset \ker(v)$.

☞ **Montrons que** $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$
Soit $y \in \text{Im}(v)$, donc il existe $z \in E$ tel que $y = v(z)$. Comme $\ker(u+v) + \ker(v) = E$, on peut décomposer z sous la forme : $z = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(u+v)$ et $x_2 \in \ker(v)$. Ainsi $y = v(z) = v(x_1 + x_2) = v(x_1) + v(x_2) = v(x_1) + 0_F = v(x_1)$. Or $x_1 \in \ker(u+v)$, donc $(u+v)(x_1) = 0_F \implies u(x_1) + v(x_1) = 0_F \implies v(x_1) = -u(x_1)$. On en déduit que : $y = -u(x_1) = u(-x_1)$, ceci montre que $y \in \text{Im}(u)$. Ceci prouve que $\text{Im}(v) \subset \text{Im}(u)$.

c Posons $w = -v$ et notons que $\ker w = \ker v, \text{Im}w = \text{Im}v$ et $\text{rg}w = \text{rg}v$. Ainsi

$$\begin{aligned}\operatorname{rg}(u+v)=\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v) &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(u+v+w)=\operatorname{rg}(u+v)+\operatorname{rg}(w)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Im}(v)\cap\operatorname{Im}(u+v)=\{0_F\},\\ \ker(v)+\ker(u+v)=E\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Im}(v)\subset\operatorname{Im}(u)\\ \ker(u)\subset\ker(v)\end{cases}\end{aligned}$$

d $\operatorname{rg}(u+v)=|\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v)| \Leftrightarrow \operatorname{rg}(u+v)=\pm(\operatorname{rg}(u)-\operatorname{rg}(v))$

$$\Rightarrow \begin{cases}\operatorname{Im}(v)\subset\operatorname{Im}(u)\\ \ker(u)\subset\ker(v)\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}\operatorname{Im}(u)\subset\operatorname{Im}(v)\\ \ker(v)\subset\ker(u)\end{cases}$$

3 On a : $\dim(\operatorname{Im}(u))+\dim(\operatorname{Im}(v))-\dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v))=\dim E$ et $\dim(\ker u)+\dim(\ker v)-\dim(\ker u\cap\ker v)=\dim E$.
En faisant la somme et en appliquant le théorème du rang à u et v, on obtient $\dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v))+\dim(\ker u\cap\ker v)=0$, donc les deux intersections sont réduites au sous-espace nul.

4 Puisque $u\circ v=0$, $\operatorname{Im}(v)\subset\ker u$. Ainsi $\operatorname{rg}(v)\leq\dim\ker u=\dim E-\operatorname{rg}(u)$, d'où $\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)\leq\dim E$.
D'autre part, $u+v$ étant inversible, $\dim E=\operatorname{rg}(u+v)\leq\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)$. On en déduit l'égalité.

5 **a** Puisque $u\circ u^2=u^3=0$, on a $\operatorname{Im}(u^2)\subset\ker u$.
Donc $\operatorname{rg}(u^2)\leq\dim\ker u=\dim E-\operatorname{rg}(u)$.

b Sachant que $\operatorname{Im}\left(u_{|\operatorname{Im}(u)}\right)=u(\operatorname{Im}(u))=\operatorname{Im}(u^2)$, le théorème du rang appliqué à la restriction $u_{|\operatorname{Im}(u)}:\operatorname{Im}(u)\to E$ donne :
$\dim(\operatorname{Im}(u))=\dim(\operatorname{Im}(u^2))+\dim(\ker u\cap\operatorname{Im}(u))$.
Donc $\operatorname{rg}(u)=\operatorname{rg}(u^2)+\dim(\ker u\cap\operatorname{Im}(u))$
Comme $u^3=0$, on a $\operatorname{Im}(u^2)\subset\ker u$, or $\operatorname{Im}(u^2)\subset\operatorname{Im}u$ d'où
$\operatorname{Im}(u^2)\subset\ker u\cap\operatorname{Im}u$, ainsi $\operatorname{rg}(u^2)\leq\dim(\ker u\cap\operatorname{Im}(u))$,
ce qui donne $\operatorname{rg}(u)\geq 2\operatorname{rg}(u^2)$.

6 **a** Sachant que $\operatorname{Im}\left(v_{|\ker(u\circ v)}\right)=v(\ker(u\circ v))\subset\ker u\cap\operatorname{Im}v$ et que $\ker\left(v_{|\ker(u\circ v)}\right)=\ker v\cap\ker(u\circ v)=\ker v$.
En appliquant le théorème du rang à $v_{|\ker(u\circ v)}:\ker(u\circ v)\to E$, on obtient :
$\dim\ker(u\circ v)=\dim\ker v+\dim(\ker u\cap\operatorname{Im}(v))\leq\dim\ker v+\dim\ker u$.

b Sachant que $\operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right)=v(\operatorname{Im}(u))=\operatorname{Im}(v\circ u)$. Appliquons le théorème du rang à la restriction $v_{|\operatorname{Im}(u)}:\operatorname{Im}(u)\to E$, d'où $\dim\operatorname{Im}(u)=\dim\operatorname{Im}(v\circ u)+\dim(\ker v\cap\operatorname{Im}(u))$, d'où le résultat.

c D'après la question 6.a) et grâce à la formule du rang, on peut conclure que $\dim E-\operatorname{rg}(u\circ v)\leqslant\dim E-\operatorname{rg}(u)+\dim E-\operatorname{rg}(v)$,
d'où $\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)-\dim E\leq\operatorname{rg}(u\circ v)$
D'après la question 6.b), on peut conclure que $\operatorname{rg}(v\circ u)\leq\operatorname{rg}(u)$, donc $\operatorname{rg}(u\circ v)\leq\operatorname{rg}(v)$, or $\operatorname{Im}(u\circ v)=u(\operatorname{Im}(v))\subset u(E)=\operatorname{Im}(u)$
Donc : $\operatorname{rg}(u\circ v)=\dim\operatorname{Im}(u\circ v)\leqslant\dim\operatorname{Im}(u)=\operatorname{rg}(u)$.
Ainsi $\operatorname{rg}(u\circ v)\leq\min(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v))$
Finalement : $\operatorname{rg}(u)+\operatorname{rg}(v)-\dim E\leq\operatorname{rg}(u\circ v)\leq\min(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v))$.

Partie B : Projecteurs (Les Classics)

1 Soit $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ une une base adaptée à la somme directe $E=\operatorname{Im}(p)\oplus\ker(p)$.

- Pour tout $x\in\mathcal{B}_1$, on a : $p(x)=x$,
- Pour tout $x\in\mathcal{B}_2$, on a : $p(x)=0_E$.

Ainsi $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)$ est diagonale, formée de $r=\dim\operatorname{Im}(p)=\operatorname{rg}(p)$ fois le nombre 1 et de $\dim E-r$ fois le nombre 0. Sa trace vaut donc $r=\operatorname{rg}(p)$.

2
- ($\Rightarrow$) Si $u\circ p=p\circ u$:
  $x\in\operatorname{Im}(p) \Rightarrow p(x)=x$
  $\Rightarrow u(x)=u(p(x))=p(u(x))\in\operatorname{Im}(p)$
  Et $x\in\ker p\Rightarrow p(x)=0\Rightarrow p(u(x))=u(p(x))=0 \implies u(x)\in\ker p$.
- ($\Leftarrow$) Réciproquement, tout $x\in E$ s'écrit $x=y+z$ avec $y\in\operatorname{Im}(p)$ et $z\in\ker p$.
  Par stabilité, $u(y)\in\operatorname{Im}(p) \implies p(u(y))=u(y)=u(p(y))$
  et $u(z)\in\ker p \implies p(u(z))=0=u(p(z))$.
  Par linéarité, $p\circ u=u\circ p$.

3 **a** Pour tout $x\in E$, on a $p(x)-x\in\ker p$, car $p^2(x)=p(x)$. Or $\ker p=\ker q$, donc $p(x)-x\in\ker q$, d'où $q(p(x)-x)=0_E$, autrement dit $q\circ p(x)=q(x)$ pour tout $x\in E$, ce qui signifie $q\circ p=q$.
D'autre part, comme p et q jouent des rôles symétriques, on conclut que $p\circ q=p$.

b Posons $r=\lambda p+(1-\lambda)q$.
On a $r^2=\lambda^2p^2+\lambda(1-\lambda)p\circ q+(1-\lambda)\lambda q\circ p+(1-\lambda)^2q^2=r$, car $p^2=p, q^2=q, p\circ q=p$ et $q\circ p=q$.

c

☞ $x \in \ker r \Rightarrow \lambda p(x)+(1-\lambda)q(x) = 0_E$. Si on applique p à cette relation, sachant que $p^2 = p$ et $p \circ q = p$, on obtient $p(x) = 0_E$. Ainsi $\ker r \subset \ker p$.
Inversement : $x \in \ker p \Rightarrow p(x) = 0_E$, mais aussi $q(x) = 0_E$ (car $\ker p = \ker q$).
Ainsi $p(x) = 0_E \Rightarrow r(x) = 0_E$, d'où l'autre inclusion $\ker r \subset \ker p$.
D'où l'égalité : $\ker r = \ker p$.

☞ $y \in \text{Im}(r) \Rightarrow \exists x \in E$ tel que $y = r(x) = \lambda p(x) + (1-\lambda)q(x)$. Donc $p(y) = \lambda p^2(x) + (1-\lambda)p \circ q(x) = p(x)$ car $\lambda p(x) = p(\lambda.x) \in \text{Im}(p)$ et car $(1-\lambda)q(x) = q((1-\lambda)x) \in \text{Im}(q)$. Ainsi $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

d

☞ Comme $\text{Im}(r) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$, et comme on est en dimension finie, alors : $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(r)) = \dim(\text{Im}(p) + \text{Im}(q))$.
D'autre part $\ker(r) = \ker(p) \Rightarrow \dim(\text{Im}(r)) = \dim(\text{Im}(p))$, d'après la formule du rang.
Ce qui donne :

$$\begin{array}{lcl} \dim \text{Im}(r) & = & \dim(\text{Im}(p)) + \dim(\text{Im}(q)) - \dim(\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)) \\ 0 & = & \dim(\text{Im}(q)) - \dim(\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)) \\ \dim(\text{Im}(q)) & = & \dim(\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)) \\ \text{Im}(q) & = & \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \text{ car } \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p) \text{ en dimension finie} \\ \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p) & & \end{array}$$

Ainsi $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q) \Leftrightarrow \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.
Comme p et q jouent des rôles symétriques, alors aussi
$\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q) \Leftrightarrow \text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$.
Finalement : $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q) \Leftrightarrow \text{Im}(p) = \text{Im}(q)$.
Or p et q sont des projecteurs, et on a $\ker(p) = \ker(q)$.
Donc $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) + \text{Im}(q) \Leftrightarrow p = q$.
Dans ce cas $r = \lambda.p + (1-\lambda).q = p = q$.

☞ D'après ce qui précède tous les $\lambda p + (1-\lambda)q$ sont des projecteurs et ils ont tous les mêmes noyaux, indépendamment de la valeur de $\lambda \in [0,1[$.
Ils auront les mêmes images dans le cas où $p = q$. Dans ce cas, pour tout $\lambda \in [0,1[$, on a $r = p = q$

4

☞ ($\Rightarrow$) Si $p \circ q = q$, pour tout $y \in \text{Im}(q)$, $y = q(x) = p(q(x)) \in \text{Im}(p)$.

☞ ($\Leftarrow$) Si $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$, alors pour tout $x \in E$, $q(x) \in \text{Im}(p)$, donc $p(q(x)) = q(x)$, soit $p \circ q = q$.

5

$(p+q)^2 = p+q \iff p^2+pq+qp+q^2 = p+q \iff pq+qp = 0 \Leftrightarrow pq = -qp$.
En multipliant à gauche puis à droite par p, on obtient $p^2qp = -pqp^2$, donc $pqp = -pqp$, d'où $pqp = 0$, or $pq = -qp$, donc $qp^2 = 0$, donc $qp = 0$ et aussi $pq = 0$.
Dans ce cas, $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \Rightarrow p(x) = q(x) = x$, donc $x = p(x) = p(q(x) = 0_E$. Ainsi $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) = \{0_E\}$.
D'autre part : Il est clair que $\ker p \cap \ker q \subset \ker(p+q)$.
Inversement : $x \in \ker(p+q) \Rightarrow p(x) + q(x) = 0_E$, si on applique p à cette relation et vu que $p^2 = 0$ et $pq = 0$, alors $p(x) = 0_E$. De même on obtient $q(x) = 0_E$ si on applique q à la formule précédente, sachant que $q^2 = q$ et que $qp = 0$. Ainsi on a démontré que $\ker(p+q) \subset \ker(p) \cap \ker(q)$.
D'où l'égalité : $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

6

☞ $(g \circ f)^2 = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \text{id}_E \circ f = g \circ f$, donc $g \circ f$ est un projecteur.

☞ $\text{Im}(g \circ f) = g(\text{Im} f) \subset g(E) = \text{Im}(g)$.
D'autre part : $\text{Im}(g) = \text{Im}(g \circ f \circ g) = (g \circ f)(\text{Im} g) \subset g \circ f(E) = \text{Im}(g \circ f)$.

☞ $\ker(g \circ f) = \ker f$ car $f(x) = 0 \implies (g \circ f)(x) = 0$, et
$(g \circ f)(x) = 0 \implies f((g \circ f)(x)) = f(x) = 0$ car $f \circ g = \text{id}_E$.

FiN