

Préparation CB : Algèbre Linéaire & Générale

Notations :

Dans tout le problème :

- ☞ $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.
- ☞ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- ☞ E est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $\dim E = n$.
- ☞ On dit que deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si $\exists P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = PNQ$, on écrit alors que $M \sim_{\text{eq}} N$.
- ☞ On rappelle que $M \sim_{\text{eq}} N$ définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une relation d'équivalence.

Partie A : Préliminaires

- ① Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in \text{GL}(E)$.
Montrer que $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$ et que $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.
- ② En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\text{rg}(PM) = \text{rg}(M) \text{ et } \text{rg}(MP) = \text{rg}(M)$$

Autrement dit : le rang est invariant si on multiplie à gauche ou à droite par une matrice inversible.
- ③ En déduire que si deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes, alors $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$.
- ④ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. On suppose $r = \text{rg}(u) \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
On considère F sev de E tel que $E = F \oplus \ker(u)$.
 - ☞ Justifier l'existence de F .
 - ☞ Montrer que $u|_F : F \rightarrow \text{Im}(u)$ est bien définie et isomorphisme.

- c Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \mathcal{B}'_2$ une base adaptée à la somme E tel que $E = F \oplus \ker(u)$.
On pose $\mathcal{B}'_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ base de F .
Justifier que $\mathcal{B}''_1 = (u(\varepsilon_1), \dots, u(\varepsilon_r))$ est libre dans E .
- d En déduire l'existence dans E d'une famille $\mathcal{B}''_2$ tel que $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}''_1 \cup \mathcal{B}''_2$ soit une base de E .
- e Justifier que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(u)$ est de la forme

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où 1 se répète r fois sur la diagonale.

- f En déduire que $M \sim_{\text{eq}} J_r$.
- g Justifier que le résultat précédent est encore valable pour $r = 0$.
- ⑤ En déduire ces deux résultats fondamentaux :
 - a Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a : $\text{rg}(M) = r \Leftrightarrow M \sim_{\text{eq}} J_r$.
 - b Deux matrices $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes $\Leftrightarrow \text{rg}(M) = \text{rg}(N)$.
- ⑥ Combien existe il exactement de classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $\sim_{\text{eq}}$.

Partie B : Opérations sur les lignes et colonnes

Notations & Vocabulaire

- ☞ **Matrice élémentaire** : $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice contenant 1 à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne et des 0 ailleurs.
- ☞ On pourra utiliser en cas de besoin la formule suivante : $E_{i,j} \cdot E_{k,l} = \delta_{j,k} E_{i,l}$.
- ☞ **Matrice de transvection** : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- ☞ **Matrice de dilatation** : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
- ☞ **Matrice de permutation** : $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- ☞ Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé mais quelconque, on note
 - ☞ $(L_1, \dots, L_n)$ les lignes de M .
 - ☞ $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de M .

- ①
 - a Montrer que $\det(T_{i,j}(\lambda)) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
 - b Montrer que le codage $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ est équivalent à remplacer M par $M \cdot T_{i,j}(\lambda)$.
 - c Montrer que le codage $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est équivalent à remplacer M par $T_{i,j}(\lambda) \cdot M$.
 - d En déduire que les codages $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ laissent le rang et le déterminant invariants.
- ②
 - a Montrer que $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
 - b Montrer que le codage $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$ est équivalent à remplacer M par $M \cdot D_i(\lambda)$.
 - c Montrer que le codage $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$ est équivalent à remplacer M par $D_i(\lambda) \cdot M$.
 - d En déduire que les codages $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda \cdot C_i$ laissent le rang invariant et multiplient le déterminant par λ .
- ③ On prend $\sigma = (i \ j)$ (une transposition qlq.)
 - a Montrer que $\det(P_\sigma) = -1$.

- b Montrer que le codage $C_i \leftrightarrow C_j$ est équivalent à remplacer M par $M \cdot P_\sigma$.
- c Montrer que le codage $L_i \leftrightarrow L_j$ est équivalent à remplacer M par $P_\sigma \cdot M$.
- d En déduire que les codages $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ laissent le rang invariant et multiplient le déterminant par -1.

④ Justifier les faits suivants :

- a Pour calculer le rang d'une matrice, on peut l'échelonner à l'aide d'opérations sur lignes et colonnes jusqu'à obtenir une matrice de la forme J_r .
- b Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut l'échelonner à l'aide d'opérations sur lignes et colonnes jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure.
- c Pour calculer l'inverse d'une matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on peut échelonner A à l'aide d'opérations uniquement sur les lignes ou bien uniquement sur les colonnes jusqu'à obtenir I_n , et en même temps on applique les mêmes opérations sur I_n , dans ce cas quand M devient I_n , alors I_n devient M^{-1} .
- d Dire pourquoi la méthode utilisée précédemment n'est pas valable pour calculer l'inverse d'une matrice si on combine à la fois des opérations sur lignes et colonnes.

Partie C : Un peu d'Algèbre Générale

Notation

- ☞ On pose $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tel que } \det(M) = 1\}$.
- ☞ On pose $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \{T_{i,j}(\lambda) \text{ tel que } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

- ① Montrer que $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$.
 $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ s'appelle le sous-groupe spécial d'ordre n .
- ② Montrer que $\det(T) = 1$, pour tout $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.
En déduire que : $\langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle \subset \text{SL}_n(\mathbb{K})$.
Ici $\langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ désigne le sous groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ engendré par $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.
- ③ Vérifier que si $T_{i,j}(\lambda) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, alors $T_{i,j}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.
Autrement dit : $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est stable par passage à l'inverse.

④ Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, deux colonnes non nulles.

a On suppose $x_1 \neq 0$, à l'aide d'opérations sur les lignes de X de type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, montrer que $\exists T_1 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_1.X = e_1$.

b On suppose $x_1 = 0$, et on fixe un $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $x_i \neq 0$

i À l'aide d'opérations sur les lignes de X de type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, montrer que $\exists T_2 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_2.X = Z$, avec $z_1 \neq 0$.

ii En déduire que $\exists T_3 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_3.Z = e_1$.

iii Conclure que $\exists T_4 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_4.X = e_1$.

c En déduire que $\exists T \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T.X = Y$

⑤ Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{K})$ tel que $M \neq I_2$.

Considérons le premier vecteur de la base canonique $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

Soit $C_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (car $M \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$).

a Montrer qu'il existe un produit de transvections $P \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$ tel que : $P.C_1 = e_1$.

b En déduire que $(PM)e_1 = e_1$.

c En déduire que il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $PM = T_{1,2}(\lambda)$.

d En déduire que $M \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$.

e Conclure que $\text{SL}_2(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$.

⑥ On se propose dans la suite de montrer, par récurrence sur $n \geq 2$, qu'en général :

$$\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$$

Selon la question précédente le résultat est vrai pour $n = 2$.

Supposons maintenant qu'il est vrai pour n , et montrons que c'est vrai pour $n + 1$.

Soit $M \in \text{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$. Posons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$.

a Justifier que $M.e_1 \neq 0$.

b En déduire que il existe $P \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$ tel que : $(PM)e_1 = e_1$.

c En déduire qu'ils existent $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $A \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$ tel que $PM = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

d Posons $C = (c_2, c_3, \dots, c_{n+1})$.

En utilisant les opérations suivantes : $C_j \leftarrow C_j - c_j C_1$, où $2 \leq j \leq n + 1$,

montrer que il existe $Q \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$ et $B \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$ tel que $PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

e En appliquant l'hypothèse de récurrence à $B \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, montrer que $M \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$.

f Conclure que $\text{SL}_{n+1}(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$

⑦ **a** Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, vérifier que $MD_1(\lambda) \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, où $\lambda = \frac{1}{\det(A)}$.

b En déduire que toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme produit d'une dilatation et d'un nombre fini de transvections.

⑧ **Commutateur** : Pour tout couple $(A, B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on pose $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$.

Sous-groupe dérivé : On pose $[\text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{GL}_n(\mathbb{K})]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs, appelé de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

a Montrer que toute matrice semblable à un commutateur est aussi un commutateur.

b Montrer que $[\text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{GL}_n(\mathbb{K})] \subset \text{SL}_n(\mathbb{K})$.

c Soit $T = I_n + \lambda E_{i,j}$ (où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$) une transvection fixée mais quelconque.

i Soit $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Vérifier que : $D.T.D^{-1} = I_n + \lambda.d_i d_j^{-1} E_{i,j}$.

ii En déduire qu'il existe $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ tel que $D.T.D^{-1} = T_{i,j}(1)$.

iii Soit $\sigma = (1 \ i).(2 \ j)$.

Vérifier que $P^{-1}E_{i,j}P = E_{1,2}$, où $P = P_\sigma$.

iv En déduire que T est semblable à $T_{1,2}(1)$.

d Vérifier que $T_{1,2}(1) = [D, T_{1,2}(1)]$, où $D = \text{diag}(2, 1, 1, \dots, 1)$.

e En déduire que toute transvection est un commutateur de deux matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

f Conclure que $[\text{GL}_n(\mathbb{K}), \text{GL}_n(\mathbb{K})] = \text{SL}_n(\mathbb{K})$.

FiN

Corrigé

Partie A : Préliminaires

- ① $\text{rg}(u \circ v) = \dim \text{Im}(u \circ v) = \dim(u \circ v(E)) = \dim(u(v(E))) = \dim(u(E)) = \text{rg}(u)$.
 $v(E) = E$ car v est un automorphisme de E .
 De même : $\text{rg}(v \circ u) = \dim(v \circ u(E)) = \dim(u(E)) = \text{rg}(u)$.
 $\dim(v \circ u(E)) = \dim(u(E))$ car v est un automorphisme de E , en particulier il conserve les dimensions.
- ② Découle immédiatement de la question précédente, si on fixe $\mathcal{B}$ une base de E , telle que $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$, donc ce cas :
 $\text{rg}(MP) = \text{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)) = \text{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u \circ v)) = \text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u) = \text{rg}(M)$.
 De même, on montre que $\text{rg}(PM) = \text{rg}(M)$.
- ③ Supposons $M \sim_{\text{eq}} N$, donc $\exists P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M = PNQ$.
 En particulier $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$ selon la question précédente.
- ④ **a** Découle du résultat du cours suivant : En dimension finie, tout sev admet au moins un supplémentaire.
b $u|_F : F \rightarrow \text{Im}(u)$ est bien définie car pour tout $x \in F$, on a $u|_F(x) = u(x)$ est unique et $u|_F(x) = u(x) \in \text{Im}(u)$.
 $u|_F$ est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire.
 $\ker(u|_F) = \ker(u) \cap F = \{0_E\}$, donc $u|_F$ est injective.
 Pour tout $y \in \text{Im}(u)$, $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$.
 Or $E = \ker(u) \oplus F$, donc $\exists z \in \ker(u), \exists w \in F$ tel que $x = z + w$.
 Ainsi $y = u(x) = u(z + w) = u(z) + u(w) = u(w) = u|_F(w)$, car $w \in F$.
 Ainsi $u|_F$ est surjective, donc automorphisme.
c On pose $\mathcal{B}'_1 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ base de F , et $u|_F : F \rightarrow \text{Im}(u)$ est un automorphisme, donc $\mathcal{B}''_1 = (u(\varepsilon_1), \dots, u(\varepsilon_r))$ est une base de $\text{Im}(u) \subset E$, en particulier elle est libre dans E .

- d** Conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.
e Conséquence immédiate de la forme des bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$.
f Conséquence immédiate du résultat de cours qui stipule que deux matrices sont équivalents lorsqu'elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
g Si $r = \text{rg}(M) = 0$, alors $M = 0$ et $J_0 = 0$, donc sont bien équivalentes car égales.
- ⑤ **a** Le sens direct découle immédiatement de la question 4).
 Le sens indirect découle immédiatement de la question 3).
b Selon la question précédente $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = r \Leftrightarrow M \sim_{\text{eq}} J_r$ et $M \sim_{\text{eq}} J_r \Leftrightarrow M \sim_{\text{eq}} Q$.
- ⑥ Il y en a exactement $n + 1$ classes d'équivalence, ce sont les $\bar{J}_r = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) = r\}$, où $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Partie B : Opérations sur les lignes et colonnes

- ① **a** $\det(T_{i,j}(\lambda)) = 1$, car $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ est une matrice triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont des 1.
b On va utiliser cette règle fondamentale du calcul matriciel. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A = A \cdot e_i$$

Ainsi

☞ Pour $k \neq j$:

$$\begin{aligned} k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.T_{i,j}(\lambda) &= M.T_{i,j}(\lambda)e_k \\ &= M.k^{\text{ème}} \text{ colonne de } T_{i,j}(\lambda) \\ &= M.k^{\text{ème}} \text{ colonne de } (I_n + \lambda.E_{i,j}) \\ &= M.e_k \text{ car } k^{\text{ème}} \text{ colonne de } I_n = e_k \\ &\quad \text{et celle de } E_{i,j} = 0 \\ &= C_k \end{aligned}$$

☞ Pour $k = j$:

$$\begin{aligned} j^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.T_{i,j}(\lambda) &= M.T_{i,j}(\lambda)e_j \\ &= M.j^{\text{ème}} \text{ colonne de } T_{i,j}(\lambda) \\ &= M.j^{\text{ème}} \text{ colonne de } (I_n + \lambda.E_{i,j}) \\ &= M.(e_j + \lambda.e_i) \text{ car } j^{\text{ème}} \text{ colonne de } I_n = e_j, \\ &\quad \text{et celle de } E_{i,j} = e_i \\ &= M.e_j + \lambda.M.e_i \\ &= C_j + \lambda.C_i. \end{aligned}$$

☞ Ainsi : les colonnes de $M.T_{i,j}(\lambda)$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M.T_{i,j}$ qui est égale à $C_j + \lambda.C_i$, ce qui correspond exactement au codage : $C_j \rightarrow C_j + \lambda.C_i$.

c On va utiliser cette règle fondamentale du calcul matriciel : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$k^{\text{ème}} \text{ ligne de } A = (k^{\text{ème}} \text{ colonne de } (A^T))^T$$

Ainsi :

☞ Si $k \neq i$.

$$\begin{aligned} k^{\text{ème}} \text{ ligne de } T_{i,j}(\lambda).M &= (k^{\text{ème}} \text{ colonne de } (T_{i,j}(\lambda).M)^T)^T \\ &= (k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M^T.T_{i,j}(\lambda)^T)^T \\ &= (k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M^T.T_{j,i}(\lambda)^T)^T \\ &= (k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M^T)^T \text{ selon le calcul précédent} \\ &= L_k \end{aligned}$$

☞

☞ Si $k = i$.

$$\begin{aligned} i^{\text{ème}} \text{ ligne de } T_{i,j}(\lambda).M &= (i^{\text{ème}} \text{ colonne de } (T_{i,j}(\lambda).M)^T)^T \\ &= (i^{\text{ème}} \text{ colonne de } M^T.T_{i,j}(\lambda)^T)^T \\ &= (i^{\text{ème}} \text{ colonne de } M^T.T_{j,i}(\lambda)^T)^T \\ &= (M^T.e_i + \lambda.M^T.e_j)^T \text{ selon le calcul précédent} \\ &= L_i + \lambda.L_j \end{aligned}$$

☞ Ainsi : les lignes de $T_{i,j}(\lambda).M$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $i^{\text{ème}}$ ligne de $T_{i,j}.M$ qui est égale à $L_i + \lambda.L_j$, ce qui correspond exactement au codage : $L_i \rightarrow L_i + \lambda.L_j$.

d Les codages $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda.C_j$ laissent le rang invariant (parce qu'on multiplie M par une matrice inversible) et laissent le déterminant invariant (parce qu'on multiplie M par une matrice de déterminant égal à 1).

2 **a** $\det(D_i(\lambda)) = \lambda$, car $D_i(\lambda)$ est une matrice diagonale, dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1, sauf le $i^{\text{ème}}$, qui vaut λ .

b ☞ Pour $k \neq i$:

$$\begin{aligned} k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.D_i(\lambda) &= M.D_i(\lambda)e_k \\ &= M.k^{\text{ème}} \text{ colonne de } D_i(\lambda) \\ &= M.e_k \\ &= C_k \end{aligned}$$

☞ Pour $k = i$:

$$\begin{aligned} i^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.D_i(\lambda) &= M.D_i(\lambda)e_i \\ &= M.i^{\text{ème}} \text{ colonne de } D_i(\lambda) \\ &= M.\lambda e_i \\ &= \lambda C_i \end{aligned}$$

☞ Ainsi : les colonnes de $M.D_i(\lambda)$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $i^{\text{ème}}$ colonne de $M.D_i(\lambda)$ qui est égale à $\lambda.C_i$, ce qui correspond exactement au codage : $C_i \rightarrow \lambda.C_i$.

c Le même raisonnement que celui utilisé dans la question 1.c) combiné avec le résultat de la question 2.b), permet de conclure que : les lignes de $D_i(\lambda).M$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $i^{\text{ème}}$ ligne de $D_i(\lambda).M$ qui est égale à $\lambda.L_i$, ce qui correspond exactement au codage : $C_i \rightarrow \lambda.C_i$.

d Les codages $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda.C_i$ laissent le rang invariant (parce qu'on multiplie M par une matrice inversible) et multiplient le déterminant par λ (parce qu'on multiplie M par une matrice de déterminant égal à λ).

3 **a** On sait que $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, si on applique la permutation σ aux colonnes

de P_σ , alors on obtient la matrice suivante $(\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n} = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = I_n$ (car $\sigma \cdot \sigma = \text{Id}$).

Comme $\det I_n = 1$, et comme le déterminant est une forme alternée : on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$, lorsqu'on applique une permutation σ à une matrice. Dans notre cas : $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma) \cdot \det(I_n) = -1$, car σ est une transposition.

b Pour $k = i$:

$$\begin{aligned} i^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.P_\sigma &= M.P_\sigma.e_i \\ &= M.i^{\text{ème}} \text{ colonne de } P_\sigma \\ &= M.e_j \\ &= C_j \end{aligned}$$

Pour $k \neq j$:

$$\begin{aligned} j^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.P_\sigma &= M.P_\sigma.e_j \\ &= M.j^{\text{ème}} \text{ colonne de } P_\sigma \\ &= M.e_i \\ &= C_i \end{aligned}$$

Pour $k \notin \{i, j\}$:

$$\begin{aligned} k^{\text{ème}} \text{ colonne de } M.P_\sigma &= M.P_\sigma.e_k \\ &= M.k^{\text{ème}} \text{ colonne de } P_\sigma \\ &= M.e_k \\ &= C_k \end{aligned}$$

Ainsi : les colonnes de $M.P_\sigma$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M.P_\sigma$ qui est égale à C_i , et $i^{\text{ème}}$ colonne de $M.P_\sigma$ qui est égale à C_j ce qui correspond exactement au codage : $C_i \leftrightarrow C_j$.

c Le même raisonnement que celui utilisé dans la question 1.c) combiné avec le résultat de la question 2.b), permet de conclure que : les lignes de $P_\sigma.M$ sont toutes égales à celles de M , sauf la $j^{\text{ème}}$ ligne de $M.P_\sigma$ qui est égale à L_i , et $i^{\text{ème}}$ ligne de $M.P_\sigma$ qui est égale à L_j ce qui correspond exactement au codage : $L_i \leftrightarrow L_j$.

d Les codages $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftrightarrow \lambda C_i$ laissent le rang invariant (parce qu'on multiplie M par une matrice inversible) et multiplient le déterminant par -1 (parce qu'on multiplie M par une matrice de déterminant égal à -1).

4 a Échelonner une matrice A à l'aide d'opérations sur lignes et colonnes ne change pas le rang comme déjà signalé. Obtenir une matrice de la forme J_r , signifie que $A = PJ_rQ$ et donc $\text{rg}(A) = r$.

b Échelonner $\det(A)$ à l'aide d'opérations sur lignes et colonnes change multiplie parfois le déterminant par $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Obtenir une matrice triangulaire supérieure

T , signifie que $A = PTQ$, donc $\det(A) = \pm \frac{1}{\lambda} \det(T)$, en respectant les règles suivantes :

On multiplie le nouveau déterminant chaque fois par $\frac{1}{\lambda}$, lorsque on utilise un codage de type $C_i \rightarrow \lambda C_i$ ou bien $L_i \rightarrow \lambda L_i$.

On multiplie le nouveau déterminant chaque fois par -1 , lorsque on utilise un codage de type $C_i \leftrightarrow \lambda C_i$ ou bien $L_i \leftrightarrow \lambda L_i$.

c Échelonner une matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ à l'aide d'opérations uniquement sur les lignes (par exemple) jusqu'à obtenir I_n , signifie on multiplie M à droite par une matrice inversible P , la matrice finale obtenue est alors $M.P = I_n$, donc $M^{-1} = P$. Appliquer en même temps les mêmes opérations sur I_n , signifie que la matrice finale obtenue est $I_n.P = P = M^{-1}$. Ainsi, quand M devient I_n , alors I_n devient M^{-1} .

d Combiner à la fois des opérations sur lignes et colonnes, signifie qu'on multiplie M à droite par une matrice inversible P et à gauche par une autre matrice inversible Q . Dans ce matrice finale est $Q.M.P = I_n$, donc $M = Q^{-1}.P^{-1} = (PQ)^{-1}$, donc $M^{-1} = PQ$. Appliquer les même opérations à I_n , signifie que la matrice finale est $Q.I_n.P = Q.P \neq M^{-1} = PQ$.

Partie C : Un peu d'Algèbre Générale

1 $\text{SL}_n(\mathbb{K}) \subset \text{GL}_n(\mathbb{K})$, car pour tout $A \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = 1 \neq 0$, donc $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

$I_n \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, car $\det(I_n) = 1$.

Si $A, B \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = \det(B)1$, donc $\det(A.B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = 1$, donc $A.B^{-1} \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi : $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$.

2 $\det(T) = 1$, pour tout $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$: Déjà abordé dans la partie B, question 1.a).

Ainsi, $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ qui contient $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, donc contient aussi $\langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad T_{i,j}(\lambda).T_{i,j}(-\lambda) &= (I_n + \lambda E_{i,j}).(I_n - \lambda E_{i,j}) \\ &= I_n - \lambda^2 E_{i,j} E_{i,j} \\ &= I_n - \lambda^2 \delta_{j,i} E_{i,j} \\ &= I_n \text{ car } i \neq j \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{a} \quad \text{Posons } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si on applique sur les lignes de X les opérations suivantes pour $2 \leq i \leq n$:

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{x_i}{x_1} L_1, \text{ alors } X \text{ devient } e_1,$$

et selon les résultats de la Partie B, question 1.c), $\exists T_1 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_1.X = e_1$

b **i** Si on applique sur les lignes de X l'opération suivante $L_1 \leftarrow L_1 + x_i L_i$, alors

$$X \text{ devient } Z = \begin{pmatrix} x_i \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ et selon les résultats de la Partie B, question 1.c),}$$

$$\exists T_2 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle \text{ tel que } T_2.X = Z \text{ tel que } z_1 = x_i \neq 0.$$

ii Selon la question précédente 4.a) appliquée à Z tel que $z_1 \neq 0$, on a $\exists T_3 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T_3.Z = e_1$.

iii $T_2.X = Z$ et $T_3.Z = e_1$, donc $T_4.X = e_1$, où $T_4 = T_3.T_2 \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$.

c Selon ce qui précède, on a montré que :
pour tout $X \neq 0$, $\exists T' \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T'.X = e_1$.
De même pour tout $Y \neq 0$, $\exists T'' \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $T''.Y = e_1$.
Finalement $T.X = Y$, où $T = T''^{-1}.T' \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$, car $\langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ est un groupe.

5 **a** Découle de la question 4), puisque $X \neq 0$ et $e_1 \neq 0$.

b Découle de la question précédente et du fait que $C_1 = M.e_1$

c Le résultat de la question précédente signifie que la 1ère colonne de PM est e_1 , or $\det(P) = \det(M) = 1$, puisque $P \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle \subset \text{SL}_2(\mathbb{K})$ et $M \in \text{SL}_2(\mathbb{K})$. Ainsi $\det(PM) = 1$ et sa 1ère colonne est e_1 , donc $PM = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}(\lambda)$, avec $\lambda \neq 0$, puisque $M \neq I_2$.

d Selon la question précédente, on a :
 $M = P^{-1}T_{1,2}(\lambda) \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$, car $P, T_{1,2}(\lambda) \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$ et $(\langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle, \cdot)$ est un groupe.

e  D'après la question précédente $M \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$, pour toute matrice $M \in \text{SL}_2(\mathbb{K})$ tel que $M \neq I_2$. D'autre part $I_2 \in \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$, car $(\langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle, \cdot)$ est un groupe. Ainsi $\text{SL}_2(\mathbb{K}) \subset \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$.

 L'autre inclusion est déjà démontré dans la Partie C, question 2).

 Finalement on a l'égalité : $\text{SL}_2(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_2(\mathbb{K}) \rangle$.

6 **a** $M.e \neq 0$ car $e_1 \neq 0$ et M inversible.

b Il suffit d'appliquer le résultat de la question 4) à $X = M.e_1$ et $Y = e_1$.

c $PM.e_1 = e_1$ signifie que la 1ère colonne de PM est e_1 , donc PM est de la forme $PM = \begin{pmatrix} 1 & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Ainsi $\det(PM) = \det(C)$. Comme $\det(P) = \det(M) = 1$, car $P \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle \subset \text{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $M \in \text{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$, alors $\det(C) = 1$. Autrement dit : $C \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$.

d On a $PM = \begin{pmatrix} 1 & c_2, \dots, c_{n+1} \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Appliquer sur les colonnes de PM les opérations suivantes : $C_j \leftarrow C_j - c_j C_1$, où $2 \leq j \leq n+1$, signifie trois choses :

 Annuler les coefficients $c_2, \dots, c_{n+1}$.

 Multiplier à droite la matrice à PM par $Q \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$

Ainsi $PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec $\det(B) = \det(PMQ) = 1$, car $P, M, Q \in \text{SL}_{n+1}(\mathbb{K})$.
Ainsi $B \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$

e Comme $B \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$, et comme $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ (hypothèse de récurrence), alors $\exists r \in \mathbb{N}^*, \exists P_k \in \mathcal{T}_n$ tel que $B = \prod_{k=1}^r P_k$.

$$\text{Ainsi } PMQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \prod_{k=1}^r P_k \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_k \end{pmatrix}.$$

Or chaque $Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_k \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K})$, car chaque $P_k \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$.

$$\text{Donc } M = P^{-1} \cdot \left(\prod_{k=1}^r Q_k \right) \cdot Q^{-1} \in \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle.$$

- f** Selon la question précédente $SL_{n+1}(\mathbb{K}) \subset \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$.
L'autre inclusion est déjà démontré dans la Partie C, question 2).
Finalement on a l'égalité : $SL_{n+1}(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{K}) \rangle$.
- 7 a** $\det(M.D_1(\lambda)) = \det(M) \cdot \det(D_1(\lambda)) = 1$, car $\det(D_1(\lambda)) = \lambda = \frac{1}{\det(A)}$.
- b** $M.D_1(\lambda) \in SL_n(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$, donc $\exists P \in \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle$ tel que $M.D_1(\lambda) = P$, donc
 $M = P.D_1(\lambda)^{-1} = P.D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.
- 8 a** Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$, tel que $P, A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, vérifiant $M = P[A, B]P^{-1}$.
Donc $M = P[A, B]P^{-1}$
 $= PABA^{-1}B^{-1}P^{-1}$
 $= (PAP^{-1})(PBP^{-1})(PA^{-1}P^{-1})(PB^{-1}P^{-1})$
 $= (PAP^{-1})(PBP^{-1})(PAP^{-1})^{-1}(PBP^{-1})^{-1}$
 $= [PAP^{-1}, PBP^{-1}]$
- b** Pour tout $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, on a
 $\det([A, B]) = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(A^{-1})\det(B^{-1}) = 1$, car
 $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ et $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)}$.
Ainsi Pour tout $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, on a $[A, B] \in SL_n(\mathbb{K})$.
Autrement dit $SL_n(\mathbb{K})$ est un groupe qui contient tous les $[A, B]$, donc il contient
le sous-groupe engendré par tous les $[A, B]$.
Autrement dit : $[GL_n(\mathbb{K}), GL_n(\mathbb{K})] \subset SL_n(\mathbb{K})$.
- c** Soit $T = I_n + \lambda E_{i,j}$ où $i \neq j$ sont deux indices distincts dans $\{1, \dots, n\}$ et
 $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrons qu'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :
 $T = Q \cdot T_{1,2}(1) \cdot Q^{-1}$.
- i** On a : $D.T.D^{-1} = I_n + \lambda(DE_{i,j}D^{-1}) = I_n + \lambda.d_i d_j^{-1} E_{i,j}$, où $DE_{i,j}D^{-1} =$
 $d_i d_j^{-1} E_{i,j}$ est une formule à vérifier par calcul direct.

- ii** Considérons la matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ définie par : $d_i =$
 λ^{-1} et $d_k = 1$ pour tout $k \neq i$.
Selon la question précédente : $D.T.D^{-1} = I_n + E_{i,j} = T_{i,j}(1)$.
- iii** Selon le résultat de la Partie B, question 3 : le produit $P^{-1}.E_{i,j}.P$ se ra-
mène à appliquer à $E_{i,j}$ aux opérations élémentaires suivantes : $C_1 \leftrightarrow$
 $C_i, C_2 \leftrightarrow C_j, L_1 \leftrightarrow L_i, C_2 \leftrightarrow C_j$, ce qui donne à la fin la matrice $E_{1,2}$.
Donc $P^{-1}.E_{i,j}.P = E_{1,2}$.
- iv** Selon la question précédente on a $P^{-1}.T_{i,j}(1).P = T_{1,2}(1)$, donc $T_{i,j}(1)$ est
semblable à $T_{1,2}(1)$, or T est semblable à $T_{i,j}(1)$ selon la question ii).
Finalement : toute transvection T est semblable $T_{1,2}(1)$.
Autrement dit : toutes les transvections sont semblables entre elles, et
forment une seule relation d'équivalence pour la relation "semblables".
- d** On a : $[D, T_{1,2}(1)] = (D.T_{1,2}(1).D^{-1}).T_{1,2}(1)^{-1}$
 $= (I_n + \lambda.d_1.d_2^{-1}E_{1,2}).T_{1,2}(1)^{-1}$ selon la question 8.c.i)
 $= (I_n + 2E_{1,2}).T_{1,2}(1)^{-1}$ car $\lambda = 1, d_1 = 2, d_2 = 1$
 $= (I_n + 2E_{1,2}).T_{1,2}(-1)$ selon Partie C, question 3)
 $= (I_n + 2E_{1,2})(I_n - E_{1,2})$
 $= I_n + E_{1,2} - 2E_{1,2}E_{1,2}$
 $= I_n + E_{1,2}$ car $E_{1,2}E_{1,2} = \delta_{2,1}E_{1,2} = 0$
 $= T_{1,2}(1)$
- 9** On sait que toute transvection est semblable à $T_{1,2}(1) = [D, T_{1,2}(1)]$.
Donc toute transvection est semblable à un commutateur.
D'après la question 8.a), toute transvection est elle même un commutateur.
- 10**  D'après la question 8.b), on a : $[GL_n(\mathbb{K}), GL_n(\mathbb{K})] \subset SL_n(\mathbb{K})$.
 D'après la question 8.e), on a $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \subset [GL_n(\mathbb{K})]$
 Donc $SL_n(\mathbb{K}) = \langle \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \rangle \subset [GL_n(\mathbb{K})]$.
 D'où l'égalité.

FiN