

DM : Algèbre Linéaire

Déterminants

Dimanche 18 Octobre 2026 (Durée : 2 heures)

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et inversible.

☞ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé à A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

☞ On pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

a Montrer que $f(F_k) \subset F_k$, puis que $f(F_k) = F_k$.

b En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

c En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.

d En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

② $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrer que $A - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.

③ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et nilpotente et $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrer que $A - \lambda I_n$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda = 0$.

④ On suppose cette fois que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure nilpotente.

a Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible.

b En déduire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on a $\text{com}(A - \varepsilon I_n)$ est triangulaire inférieure.

c En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

⑤ On suppose cette fois que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure et non nilpotente.

a On pose $\alpha = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } A - \lambda I_n \text{ non inversible}\}$.

Montrer que α est bien défini et que $\alpha \neq 0$.

b Montrer que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible.

c En déduire que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $\text{com}(A - \varepsilon I_n)$ est triangulaire inférieure.

d En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

⑥ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

a si $\text{rg}(A) = n$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$

b si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$

c si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 0$

⑦ Calculer $\text{com}(\text{com } A)$ dans le cas où A est inversible.

⑧ Si $\text{rg } A \leq n - 2$, démontrer que $\text{com } A = 0$.

⑨ On suppose que $\text{rg } A = n - 1$.

a Montrer que : $\text{rg}(\text{com } A) = 1$

b En déduire l'existence $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq. $\text{com } A = U^t V$.

⑩ On suppose que $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Calculer $\text{com}(I_n)$ et $\text{com}(\lambda A)$.

b Si A et B sont inversibles.

Démontrer que $\text{com}(AB) = (\text{com } A)(\text{com } B)$ et $\text{com}(A^{-1}) = \text{com}(A)^{-1}$.

c Démontrer que le premier résultat de la question précédente est encore valable dans le cas général.

Indic : On pourra admettre que les résultats des questions 5.a et 5.b sont encore valables dans le cas général.

d En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com } A$ et $\text{com } B$ le sont.

Corrigé

- ① **a** Puisque A est triangulaire supérieure, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f(e_j) = \sum_{i=1}^j a_{i,j} e_i \in F_k$.
Par combinaison linéaire, $f(F_k) \subset F_k$. Comme f est un automorphisme (car A inversible), alors $\dim f(F_k) = F_k$, d'où $f(F_k) = F_k$ (puisque on est en dimension finie).
- b** D'après la question précédente, on a : $f^{-1}(F_k) = f^{-1}(f(F_k)) = F_k$.
- c** D'après la question précédente, $f^{-1}(e_k) \in F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donc $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$ est triangulaire supérieure.
- d** On sait que $A \cdot {}^t \text{com}(A) = \det(A) I_n$, d'où ${}^t \text{com}(A) = \det(A) A^{-1}$. Puisque A^{-1} est triangulaire supérieure, ${}^t \text{com}(A)$ est triangulaire supérieure, et donc $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.
- ② Si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Or A est triangulaire, donc $\det(A - \lambda I_n) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - \lambda)$. D'où $\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$.
- ③ Si A est nilpotente, alors $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$, en particulier $\det(A^p) = \det(A)^p = 0$, donc $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = 0$, d'où $a_{ii} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question précédente, on conclut que si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, alors $\lambda = 0$.
- ④ **a** Découle immédiatement de la question précédente.
- b** Pour $\varepsilon \neq 0$, la matrice $A - \varepsilon I_n$ est triangulaire supérieure et inversible. D'après la question 1.d, sa comatrice est triangulaire inférieure.
- c** L'application $M \mapsto \text{com}(M)$ est continue (ses coefficients sont des déterminants). En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient par passage à la limite que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.
- ⑤ **a** Selon ce qui précède :
 $\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } A - \lambda I_n \text{ non inversible}\} = \{|a_{11}|, \dots, |a_{nn}| \text{ tel que } a_{ii} \neq 0\}$,
or A n'est pas nilpotente, donc $\exists a_{ii} \neq 0$.

D'où $\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } A - \lambda I_n \text{ non inversible}\}$ est un ensemble fini non vide, donc admet un plus petit élément, lui aussi non nul.

- b** Découle immédiatement de la définition :
 $\alpha = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } A - \lambda I_n \text{ non inversible}\}$.
- c** Puisque $A - \varepsilon I_n$ est triangulaire supérieure et inversible, sa comatrice est triangulaire inférieure (question 1.d).
- d** Par continuité de la comatrice, en faisant $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on conclut que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.
- ⑥ **a** $A \cdot {}^t \text{com}(A) = \det(A) I_n$. Comme $\det(A) \neq 0$, ${}^t \text{com}(A)$ est inversible, donc $\text{com}(A)$ l'est aussi et son rang vaut n .
- b** On a $A \cdot {}^t \text{com}(A) = 0$. Donc $\text{Im}({}^t \text{com}(A)) \subset \ker(A)$. Comme $\dim \ker(A) = 1$, $\text{rg}(\text{com}(A)) \leq 1$. Or $\text{rg}(A) = n - 1$, donc parmi les colonnes de A , on peut trouver $n - 1$ colonnes indépendantes, ce qui implique que leur mineur associé est non nul, donc au moins un coefficient de $\text{com}(A)$ est non nul. D'où $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$.
- c** $\text{rg}(A) \leq n - 2$ signifie que toute famille de $n - 1$ colonnes de A est liée, donc Tous les mineurs d'ordre $n - 1$ sont nuls, donc tous les cofacteurs sont nuls, d'où $\text{com}(A) = 0$.
- ⑦ $\text{com}(A) = \det(A) ({}^t A)^{-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{operatorname{com}}(\text{com}(A)) &= (\det(\text{com}(A))) \cdot ({}^t \text{com}(A))^{-1} \\ &= \det(A)^{n-1} \cdot (\det(A) A^{-1})^{-1} \\ &= \det(A)^{n-2} A \end{aligned}$$
- ⑧ Résultat immédiat de la question 6.c.
- ⑨ **a** Déjà démontré en 6.b.
- b** Toute matrice de rang 1 s'écrit sous la forme d'un produit d'une matrice colonne U non nulle et d'une matrice ligne ${}^t V$ non nulle (exercice déjà vu en TD, à savoir refaire).

- 10 a I_n est inversible, donc $\text{com}(I_n) = \det(I_n) (I_n)^T = I_n$.
D'autre part $\text{com}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{com}(A)$, car tous les coefficients de $\text{com}(\lambda A)$ sont des déterminants de taille $n-1$.
- b Comme A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi (résultat du cours).
Donc :
$$\begin{aligned} \text{com}(AB) &= \det(AB) ({}^t(AB))^{-1} \\ &= \det(A) \det(B) ({}^t B)^{-1} ({}^t A)^{-1} \\ &= \text{com}(A) \text{com}(B) \end{aligned}$$

D'autre part :
$$\begin{aligned} I_n &= \text{com}(I_n) \\ &= \text{com}(A.A^{-1}) \\ &= \text{com}(A) \text{com}(A)^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\text{com}(A)^{-1} = \text{com}(A^{-1})$.

- c **Cas général :** Selon la question précédente, on a :
 $\text{com}((A - \varepsilon I_n)(B - \varepsilon I_n)) = \text{com}(A - \varepsilon I_n) \text{com}(B - \varepsilon I_n)$.
Or, l'application $M \mapsto \text{com}(M)$ est continue (ses coefficients sont des déterminants). En faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'égalité de la question précédente, on obtient le résultat demandé.
- d $B = PAP^{-1}$. Alors (en utilisant les question 10.b et 10.c), on a :
 $\text{com}(B) = \text{com}(P) \text{com}(A) \text{com}(P)^{-1}$, ce qui prouve que $\text{com}(A)$ et $\text{com}(B)$ sont semblables.

Fin