.

Devoir Maison

Intégration (CNC 2023)

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

Dans ce problème, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f. \qquad (\mathscr{L}_f)$$

Si $x_0 \in I$, on définit la fonction $\varphi_{f,x_0} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in I, \quad \varphi_{f,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles.*

1ère Partie
Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$
Application au cas où f est 2π-périodique

1.1. Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

1.2. Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\quad \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$

1.2.1. Justifier que les fonctions φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I et exprimer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in I$.

1.2.2. Montrer que, pour tout $x \in I$, $\quad \varphi_{f,x_0}(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$. Que vaut $\varphi_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.3. En déduire que φ_{f,x_0} est dérivable sur I et exprimer $\varphi'_{f,x_0}(x)$ pour tout $x \in I$. Que vaut $\varphi'_{f,x_0}(x_0)$?

1.2.4. Montrer que φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et qu'elle est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.2.5. Montrer que φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0.

1.3. Expression intégrale des solutions de $(\mathscr{L}_f)$

Montrer que les solutions, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

1.4. Étude de la périodicité des solutions de $(\mathscr{L}_f)$ dans le cas où f est 2π-périodique

Dans cette section, on suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est $2\pi-$périodique.

1.4.1. On suppose que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

(ii) En déduire que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t)\, \mathrm{d}t = 0$.

(iii) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

1.4.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, \mathrm{d}t = 0$.

(i) Montrer que, pour tout réel x, $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\, \mathrm{d}t = 0$.

(ii) En déduire, d'abord que $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique, puis justifier qu'il en est de même de toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

1.4.3. Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

2ème Partie
Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$, *dite de* Dirichlet.

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de Dirichlet

(i) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(ii) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \Big[\frac{1-\cos t}{t}\Big]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

(iii) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

2.1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$ est également convergente.

2.2. Étude de solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ lorsque $I =]0, +\infty[$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$

Dans cette section, on suppose que $I =]0, +\infty[$ et que f est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. On cherche à montrer, par analyse-synthèse, que l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ admet une unique solution, sur $]0, +\infty[$, ayant 0 pour limite en $+\infty$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

(i) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, x > 0, \quad \psi(x) = \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t\right)\sin x.$$

(ii) Montrer que $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ et que $\mu = -\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, \mathrm{d}t$. *On pourra considérer les suites numériques* $\big(\psi(2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$ *et* $\big(\psi(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\big)_{n\geqslant 1}$.

(iii) En déduire que, pour tout $x > 0$, $\psi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, \mathrm{d}t$.

2.2.2. Synthèse : Montrer que la fonction $\psi_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\, \mathrm{d}t$ est effectivement solution, sur $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ et qu'elle admet 0 pour limite en $+\infty$.

Corrigé

Problème

Exemples d'utilisation d'équations différentielles en analyse

Notations

I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ; on note $(\mathscr{L}_f)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + y = f$$

1ère Partie

Expression intégrale des solutions de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ Application au cas où f est 2π-périodiques .

1.1 Σ_0 est une partie non vide de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, $0 \in \Sigma_0$, stable par combinaison linéaire (*simple à vérifier*) , donc c'est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Les solutions réelles de cette équation , linéaire homogène de second ordre, sont de la forme

$$y : x \mapsto a\cos x + b\sin x$$

donc Σ_0 est de dimension 2 dont une base est la famille $(\cos, \sin)$.

1.2 Recherche d'une solution particulière de $(\mathscr{L}_f)$

Pour tout $x \in I$, on pose $\varphi_1(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\cos t \ \mathrm{d}t$ et $\varphi_2(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\sin t \ \mathrm{d}t$.

1.2.1 f est continue sur I donc les fonctions $t \mapsto f(t)\cos t$ et $t \mapsto f(t)\sin t$ sont continues , par suite φ_1 et φ_2 sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\varphi_1'(x) = f(t)\cos t$ et $\varphi_2'(x) = f(t)\sin t$ pour tout $x \in I$.

1.2.2 Soit $x \in I$,on a

$$\begin{aligned}
\varphi_{f,x_0}(x) &= \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x} f(t)(\sin(x)\cos(t) - \cos(x)\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \sin(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_{x_0}^{x} f(t)\sin(t)dt \\
&= \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_{f,x_0}(x_0) = 0$.

1.2.3 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ_{f,x_0} l'est aussi et

$$\begin{aligned}
\varphi'_{f,x_0}(x) &= \varphi_1'(x)\sin x + \varphi_1(x)\cos x - \varphi_2'(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= f(x)\cos x.\sin x \ + \varphi_1(x)\cos x - \ f(t)\cos .x\sin x + \varphi_2(x)\sin x \\
&= \varphi_1(x)\cos x + \varphi_2(x)\sin x
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi'_{f,x_0}(x_0) = 0$.

1.2.4 φ_1 et φ_2 sont dérivables sur I donc φ'_{f,x_0} est dérivable sur I par suite φ_{f,x_0} est deux fois dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\varphi''_{f,x_0}(x) &= \varphi'_1(x)\cos x - \varphi_1(x)\sin x + \varphi'_2(x)\sin x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x)\cos^2 x \ - \varphi_1(x)\sin x + \ f(t)\sin^2 x + \varphi_2(x)\cos x \\ &= f(x) + \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x \\ &= -\varphi_{f,x_0}(x) + f(x)\end{aligned}$$

ainsi φ_{f,x_0} est solution, sur I, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$

1.2.5 Soit ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ telle que $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = 0$, posons $Y = \psi - \varphi_{f,x_0}$, alors elle vérifie $Y'' + Y = 0$ et il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$ de plus on a $Y(x_0) = Y'(x_0) = 0$ donc

$$\begin{cases} a\cos x_0 + b\sin x_0 = 0 \\ -a\sin x_0 + b\cos x_0 = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est égale 1 , sa matrice est inversible il admet donc une unique solution et $a = b = 0$ d'où $Y = 0$ et $\psi = \varphi_{f,x_0}$.

Ainsi φ_{f,x_0} est l'unique solution, sur I, du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

1.3. De la même façon , si ψ une solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur I, alors $y = \psi - \varphi_{f,x_0}$ vérifie $y'' + y = 0$, donc il existe a et b tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$, d'où

$$\psi(x) = a\cos x + b\sin x + \int_{x_0}^{x} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne le résultat.

1.4. On suppose que $I = R$ et que f est 2π-périodique.

1.4.1. Soit g une solution 2π-périodique de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$.

i) D'après 1.3 avec $x_0 = 0$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

ii) Soit x un réel , on a $g(x) = g(x + 2\pi)$ donc

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x+2\pi-t)\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

la relation de Chasles donne $\displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0.$

iii) En particulier

$\rightarrow$ Si $x = 0$ alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0.$

$\rightarrow$ Si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\sin(\frac{\pi}{2}-t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0.$$

écrivons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t.$$

un changement de variable $t = u + 2\pi$ donne

$$\int_{2\pi}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u+2\pi)\cos(u+2\pi)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cos(u)\mathrm{d}u.$$

d'où

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$$

1.4.2. On suppose ici que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\ \mathrm{d}t = 0.$

i) Soit x un réel , on a

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_x^0 f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$$

le changement de variable $t = u + 2\pi$ donne $\int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$, donc

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \sin(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)dt}_{=0} - \cos(x)\underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\sin(t)dt}_{=0} = 0$$

d'où

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) On a $\varphi_{f,0}(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

d'après i) $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t = 0$ donc $\varphi_{f,0}(x+2\pi) = \varphi_{f,0}(x)$ et $\varphi_{f,0}$ est 2π-périodique.
Soit g une solution de $(\mathscr{L}_f)$, il existe λ et μ tels que

$$\begin{aligned}g(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)\end{aligned}$$

$\varphi_{f,0}$, cos et sin sont 2π-périodiques donc g est 2π-périodique .

1.4.3. Si $f\ (x) = \sin(x)$, les solutions de $(\mathscr{L}_f)$ sont de la forme
$g : x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x + \varphi_{f,0}(x)$ avec

$$\begin{aligned}\varphi_{f,0}(x) &= \int_0^x \sin(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t \\ &= \sin(x)\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x \sin^2(t)dt\end{aligned}$$

on a

$$\int_0^x \sin(t)\cos(t)dt = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin^2(t)dt &= \int_0^x \frac{1-\cos(2x)}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\end{aligned}$$

ainsi

$$\varphi_{f,0}(x) = \frac{1}{2}\sin^3(x) - \cos(x)(\frac{1}{2}\underset{\uparrow}{x} - \frac{1}{4}\sin 2x)$$

$\varphi_{f,0}$ n'est pas $2\pi-$périodique donc l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ n'admet pas de solution 2π-périodique.

2ème Partie

Application à l'étude d'une intégrale dépendant d'un paramètre et au calcul de l'intégrale de Dirichlet

2.1. Convergence d'intégrales

2.1.1. Convergence de l'intégrale de DIRICHLET

i) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

$\to$ En 0 : On a $\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1-(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2))}{t^2} = \dfrac{1}{2}+o(1)$ donc $\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\to} \frac{1}{2}$.

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

$\to$ En $+\infty$: $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$, la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'où la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

ii) Soit $x > 0$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(1-\cos t)'}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

iii) $\to$ On a $\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0^+}{\to} 1$ donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 etelle est intégrable sur $]0,1]$ ainsi l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge .

$\to$ D'après i) la fonction $t \longmapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

D'où l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2.1.2. Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{(\sin t)'}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{\sin t}{t^2}\right| \leq \dfrac{1}{t^2}$, donc $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, ains l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2.2. $I =]0,+\infty[$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

2.2.1. Analyse : On suppose que ψ est une solution, sur $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle $(\mathscr{L}_f)$ ayant 0 pour limite en $+\infty$.

i) Soit $x \in]0,+\infty[$, d'après 1.3 avec $x_0 = 1$, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t \\ &= \lambda\cos x + \mu\sin x + \sin x\int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t - \cos x\int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \left(\lambda - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(\mu + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x\end{aligned}$$

ii) ψ tend vers 0 en $+\infty$ donc les deux suites $(\psi(2n\pi))_{n\geqslant 1}$ *et* $\left(\psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right)_{n\geqslant 1}$ convergent vers 0 en $+\infty$. On a

$$\psi(2n\pi) = \lambda - \int_1^{2n\pi} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \ \text{ et } \ \psi\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = (-1)^n\left(\mu + \int_1^{\frac{\pi}{2}+2n\pi} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)$$

par passage à la limite en $+\infty$ on obtient

$$\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

iii) On déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\cos x + \left(-\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t. + \int_1^x \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right)\sin x \\ &= \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

2.2.2. Synthèse : d'après la question précèdente on a

$$\psi_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ \mathrm{dt} = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_1^x \frac{\sin(x-t)}{t}\mathrm{d}t$$

avec $\lambda = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\mu = -\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$, donc ψ_1 est solution de $(\mathscr{L}_f)$ sur $]0,+\infty[$.
Et aussi

$$\psi_1(x) = \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$$

donc

$$|\psi_1(x)| \leq \left|\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t\right|$$

les deux intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t$ convergent donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\ \mathrm{d}t = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi_1(x) = 0$.
Ainsi ψ_1 est solution, sur $]0,+\infty[$, de $(\mathscr{L}_f)$ et elle admet 0 pour limite en $+\infty$.