Devoir Maison

Intégration (e3a 2024)

Problème

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$: $\quad y' + \dfrac{\mu}{x}y = 0$.

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0.$ $\quad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ *par x lorsque x est non nul.*

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

Corrigé

Problème (e3a 2024)

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. F est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que la fonction F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, pour tout x réel positif, on a : $F'(x) = f(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $x > 0$.

Le changement de variable affine $u = xt$ permet d'écrire que : $\Psi(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x}$.

3. D'après la question de cours 1. la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en 0 : on a, pour tout $x > 0$, $\Psi(f)(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ et donc, $\lim\limits_{x\to 0} \Psi(f)(x) = F'(0) = f(0)$.

On en déduit que $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ avec $\Psi(f)(0) = f(0)$.

4. La linéarité de l'intégration donne celle de Ψ.

De plus, d'après la question précédente, pour toute f de E, on a $\Psi(f) \in E$, ce qui achève de prouver que Ψ est un endomorphisme de E.

5. **Surjectivité de Ψ**

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

5.1. Par opérations élémentaires, la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Étude en 0 : On a, pour tout $x > 0$, $|h(x)| \leqslant |x|$, ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$.

Il en résulte que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. Soit $x > 0$. Étudions la dérivabilité de le fonction h en 0.

On a : $\Delta(x) = \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On considère alors la suite u définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n\pi + \pi/2}$.

Alors, pour tout entier naturel n, $\Delta(u_n) = (-1)^n$, ce qui prouve que $\Delta(x)$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0.

Il en résulte que h n'est pas dérivable en 0 et donc, ne peut être de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$: il existe donc $f \in E$ telle que $g = \Psi(f)$.

Alors, pour tout $x > 0$, $x\,g(x) = F(x)$ et $0 \times g(0) = 0 = F(0)$.

On en déduit que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ coïncide avec la fonction $x \mapsto F(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. En utilisant la question précédente regardons si la fonction $\theta : x \mapsto x\,h(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$:

- Facilement, puisque pour tout $x > 0$, on a : $|\theta(x)| \leqslant x^2$, la fonction θ est de classe C^0 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\theta(0) = 0$.

- Pour $x > 0$, $\dfrac{\theta(x) - \theta(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 : la fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\theta'(0) = 0$.

- Pour tout $x > 0$, $\theta'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'admet pas de limite en 0 puisque la fonction $x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'en possède pas (On procède comme à la question **5.2**)

Il en résulte que la fonction θ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve d'après la question précédente que $h \notin \mathrm{Im}\,(\Psi)$.

5.5. On déduit de l'étude précédente que Ψ n'est pas surjective.

6. Soit $f \in E$ telle que $\Psi(f) = 0$ (fonction nulle)

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\dfrac{F(x)}{x} = 0$, soit $\forall\, x > 0$, $F(x) = 0$.

Comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que F est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et par dérivation que f est aussi nulle sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Comme Ψ est injective, 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0$$

7.2. Les solutions de (L) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

7.3. Pour qu'une solution de (L) soit prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ il faut qu'elle possède une limite finie en 0.

- Si $\mu \leqslant 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ possède une limite finie en 0.

- Si $\mu > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$ n'est prolongeable par continuité en 0 que si, et seulement si, $C = 0$ et c'est donc la fonction nulle.

Conclusion : Les solutions de (L) prolongeable par continuité en 0 sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{C}{x^\mu}$, avec $\mu \leqslant 0$ et $C \in \mathbb{R}$.

7.4. Soit λ une valeur propre de Ψ et f une fonction non nulle du sous-espace propre associé $E_\lambda(\Psi)$.

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\dfrac{F(x)}{x} = \lambda f(x) = \lambda F'(x)$.

Ainsi, F est solution de l'équation (L) dans le cas où $\mu = -\dfrac{1}{\lambda}$.

Mais comme F est continue sur $\mathbb{R}_+$, il faut récupérer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$, ce qui donne : $\lambda > 0$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = C\, x^{1/\lambda}$ puis $f(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Mais il faut aussi que f soit continue sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\dfrac{1}{\lambda} - 1 \geqslant 0$ ce qui donne finalement $\lambda \in]0, 1]$

Ainsi, le spectre de Ψ est inclus dans $]0, 1]$ et facilement, $E_\lambda(\Psi) \subset \text{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$.

Réciproquement, soit $\lambda \in]0, 1]$ et $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda - 1}$.

On a : $\Psi(f_\lambda) = \displaystyle\int_0^1 (xt)^{\frac{1}{\lambda}-1}\, \mathrm{d}t = x^{\frac{1}{\lambda}-1} \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^1 = \lambda\, f_\lambda(x)$.

Finalement, on a donc démontré que le spectre de Ψ est $]0, 1]$ et que pour chaque valeur propre $\lambda > 0$, le sous-espace propre associé est : $E_\lambda(\Psi) = \text{Vect}(x \mapsto x^{\frac{1}{\lambda}-1})$.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j = 0$ $(*)$.

8.1.1. Soit $x > 0$.

En simplifiant par x non nul, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^n \beta_j x^{j-1} \ln(x) = g(x) = 0$.

- Si $\beta_1 \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) \neq 0$ et donc $\beta_1 = 0$.
- On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \alpha_1$ et donc que $\alpha_1 = 0$.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.

On a toujours $x > 0$ et on simplifie $(*)$ par x^{p-1} cette fois, ce qui donne :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i f_{i-p+1} + \sum_{j=p+1}^n \beta_j g_{j-p+1} = 0$$

Par le même raisonnement qu'au-dessus, on obtient alors $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Par récurrence forte, on a donc montré que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = \beta_1 = ... = \beta_n = 0$, ce qui prouve la liberté de la famille $\mathscr{B}$ et que $\dim(F_n) = 2n$.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

La fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ est continue sur l'intervalle $]0, x]$.

Par croissances comparées, $\lim_{t\to 0} t^p \ln(t) = 0$ et donc, on peut prolonger par continuité la fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ sur l'intervalle $[0, x]$.

Conclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Comme les fonctions $t \mapsto t^{p+1}$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\ln(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{p+1}}{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln(x) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

8.2.2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Alors, pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$\Psi(f_i)(x) = \int_0^1 (xt)^i\,\mathrm{d}t = x^i\left[\frac{t^{i+1}}{i+1}\right]_0^1 = \frac{1}{i+1}x^i, \text{ soit } \Psi(f_i) = \frac{1}{i+1}f_i \in F_n$$

$$\text{et } \Psi(g_i) = \int_0^1 (xt)^i \ln(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (xt)^i(\ln(x)+\ln(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+1}x^i\ln(x) - \frac{1}{(i+1)^2}x^i, \text{ soit}$$

$$\Psi(g_i) = \frac{1}{i+1}g_i - \frac{1}{(i+1)^2}f_i \in F_n.$$

On en déduit que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. On en déduit la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$:

$$M_{\mathscr{B}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \frac{1}{n+1} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{(n+1)^2} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{2} & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

8.4. $M_{\mathscr{B}}(\Psi)$ est une matrice triangulaire dont aucun des termes diagonaux est nuls : c'est une matrice inversible et donc, Ψ_n est un automorphisme de F_n.

On aurait aussi pu dire que l'injectivité de Ψ entraîne celle de Ψ_n et en tant qu'endomorphisme injectif de F_n qui est de dimension finie, c'est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} (x+x^2)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

On a : $z = g_1 + g_2 \in F_n$.

Puis, on prend $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j \in F_n$ et on écrit que $\Psi_n(f) = z$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1}{2} - \dfrac{\beta_1}{4} = 0 \\ \dfrac{\alpha_2}{3} - \dfrac{\beta_2}{9} = 0 \\ \dfrac{\beta_1}{2} = 1 \\ \dfrac{\beta_2}{3} = 1 \end{cases}$$

soit finalement, $\Psi^{-1}(z) = f_1 + f_2 + 2\,g_1 + 3\,g_2$