DM : Réduction

Quelques Densités Utiles & Applications

Samedi 7 Novembre 2026 (Durée : 2h)

☞ Dans tout le problème $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A : Quelques Densités Utiles

☞ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

☞ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$.

☞ On a bien $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$.

(1) On suppose dans cette question que A est nilpotente.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(2) On suppose dans cette question que A est non nilpotente.
On pose $\varepsilon = \min\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{0\}\}$.

[a] Justifier que ε est bien défini et non nul.

[b] Montrer que pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(3) En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$.

(4) Dans cette question

☞ On considère T une matrice triangulaire supérieure.

☞ On pose $\lambda_i = t_{i,i}$.

☞ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_k = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{k}, \ldots, \frac{n}{k}\right)$.

☞ Autrement dit : T_k est une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont les $\mu_i = \lambda_i + \frac{i}{k}$.

☞ Il est clair que $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = T$.

[a] On suppose que $\exists j \neq i$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$.
Montrer alors que $\mu_i \neq \mu_j$.

[b] On suppose que $\exists j \neq i$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$.
On pose alors $\varepsilon = \min\left\{\frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|i-j|} \text{ tel que } i \neq j \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j\right\}$.

[i] Justifier que ε est bien défini et non nul.

[ii] Montrer que pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $\mu_i \neq \mu_j$ pour tout $i \neq j$

[c] En déduire que T_k est diagonalisable à partir d'un certain indice.

(5) En déduire que $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ diagonalisable}\}$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists A_k \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$.

(6) En déduire que $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{T}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ trigonalisable}\}$.
Autrement dit : $\forall A \in \mathcal{T}(\mathbb{R}), \exists A_k \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$.

Partie B : Applications

1 **Déterminant d'une matrice par blocs.**

☞ Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, tel que $CD = DC$.

☞ On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

a On suppose dans cette question que D est inversible.
Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

☞ **Indication** : Utiliser la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix}$

b Montrer que le résultat de la question précédente est encore valable même si D n'est pas inversible.

☞ **Indication** : Utiliser le résultat de la partie A, question 2), ainsi que la continuité de l'application $A \mapsto \det(A)$.

2 **Démonstration Topologique de Cayley-Hamilton**

a Montrer que $\chi_D(D) = 0$ pour toute matrice diagonale.

b En déduire que $\chi_A(A) = 0$, pour toute matrice A diagonalisable.

c Montrer la continuité de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) & \mapsto & P(A) \end{array}$.

d En déduire la continuité de l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \chi_A(A) \end{array}$.

e En déduire que $\chi_A(A) = 0$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

☞ **Indication** : Utiliser le résultat de la Partie A, question 6), ainsi que la continuité de l'application $\psi : A \mapsto \chi_A(A)$.

3 **Un Grand Classic (Tous les concours)** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

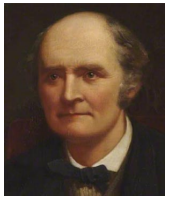
a On suppose dans cette question que A est inversible.

i Montrer que AB et BA sont semblables

ii En déduire que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

b Montrer que le résultat précédent est encore valable même si A n'est pas inversible.

☞ **Indication** : Utiliser le résultat de la Partie A, question 2), ainsi que la continuité de l'application $\psi : A \mapsto \chi_A(X)$.



Arthur Cayley (1821-1895) : Mathématicien britannique, il a exercé comme avocat pendant quatorze ans pour subvenir à ses besoins tout en publiant des centaines d'articles.
Il est connu pour avoir fondé la théorie des matrices et posé les bases de la théorie abstraite des groupes.



William Rowan Hamilton (1805–1865) : Mathématicien, physicien et Đastronome irlandais.
Il maîtrisait plus d'une dizaine de langues dès son plus jeune âge
Il es connu pour avoir fondé la mécanique hamiltonienne et avoir inventé les quaternions.

FiN

Corrigé

Partie A : Quelques Densités Utiles

(1) **Cas où A est nilpotente :**
Soit A une matrice nilpotente. Son spectre sur $\mathbb{K}$ est réduit à $\{0\}$: $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le scalaire $\frac{1}{k} \neq 0$ n'est pas valeur propre de A.
Ainsi, $\det(A_k) = \det(A - \frac{1}{k} I_n) \neq 0$, ce qui garantit que $A_k \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(2) **Cas où A est non nilpotente :**

[a] Puisque A est non nilpotente, A possède au moins une valeur propre non nulle dans $\mathbb{C}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on se place dans le spectre complexe $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$).
L'ensemble $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{0\}$ est non vide et fini (il contient au plus n éléments distincts).
Par conséquent, $\varepsilon = \min\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{0\}\}$ est la borne inférieure d'un ensemble fini non vide de réels strictement positifs.
Ainsi ε est donc parfaitement bien défini et strictement positif ($\varepsilon > 0$).

[b] Soit $k > \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors $\frac{1}{k} < \varepsilon$.
Si $\frac{1}{k}$ était valeur propre de A, on aurait par définition de ε : $\varepsilon \leq \left|\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{k}$
Ce qui contredit $\frac{1}{k} < \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{1}{k} \notin \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, d'où $\det(A - \frac{1}{k} I_n) \neq 0$. On a donc $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$.

(3) Selon ce qui précède, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nilpotente ou non, la suite (A_k) construite ci-dessus est (à partir d'un certain rang) une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A.
Ainsi : Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(4) [a] Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\mu_i - \mu_j = \frac{i-j}{k} \neq 0$ car $i \neq j$.

[b] .

[i] L'ensemble $E = \left\{ \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|i-j|} \;\middle|\; 1 \leq i \neq j \leq n \text{ et } \lambda_i \neq \lambda_j \right\}$ est un ensemble fini non vide de réels strictement positifs.
Son minimum ε est donc bien défini et strictement positif.

[ii] Soit $k > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Soit $i \neq j$:

- Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\mu_i - \mu_j = \frac{i-j}{k} \neq 0$.
- Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, supposons par l'absurde que $\mu_i = \mu_j$. Alors $\lambda_i - \lambda_j = \frac{j-i}{k}$. En prenant le module : $|\lambda_i - \lambda_j| = \frac{|i-j|}{k} \implies \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|i-j|} = \frac{1}{k}$. Par définition de ε, on aurait $\varepsilon \leq \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{|i-j|} = \frac{1}{k} < \varepsilon$, contradiction.

Ainsi, pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$ et pour tous $i \neq j$, on a $\mu_i \neq \mu_j$.

[c] Pour $k > \frac{1}{\varepsilon}$, la matrice T_k est triangulaire supérieure et possède n coefficients diagonaux $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distincts.
Ainsi, T_k possède n valeurs propres distinctes, ce qui garantit qu'elle est diagonalisable.

(5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après le théorème de trigonalisation, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
D'après la question 4.c, il existe une suite de matrices diagonalisables (T_k) telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = T$.
Posons $A_k = PT_kP^{-1}$. Chaque A_k est semblable à T_k, donc diagonalisable. Par continuité du produit matriciel :

$\lim_{k\to+\infty} A_k = P\left(\lim_{k\to+\infty} T_k\right)P^{-1} = PTP^{-1} = A.$
Donc : $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ est donc dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(6) Si $A \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$, alors A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
La même suite $T_k = T + \text{diag}(\frac{1}{k}, \dots, \frac{n}{k}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fournit des matrices à coefficients réels, diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ est donc dense dans $\mathcal{T}(\mathbb{R})$.

Partie B : Applications

(1) **a** Considérons la matrice bloc $N = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix}$.
On a $\det(N) = 1$. Effectuons le produit matriciel par blocs :
$MN = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -D^{-1}C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ C-DD^{-1}C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$
Par la propriété des déterminants par blocs (matrice triangulaire par blocs) :

$$\det(MN) = \det(A - BD^{-1}C)\cdot\det(D)$$

Puisque $\det(MN) = \det(M)\det(N) = \det(M)$, et que par commutativité ($CD = DC \implies D^{-1}C = CD^{-1}$) :
Donc $\det(A-BD^{-1}C)\det(D) = \det\left((A-BCD^{-1})D\right) = \det(AD-BCD^{-1}D) = \det(AD-BC)$.
Ainsi, $\det(M) = \det(AD-BC)$.

b Si D n'est pas inversible, par densité de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (Partie A, Question 2), il existe une suite $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \text{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers D.
Pour préserver la relation de commutativité, on peut poser $D_k = D - \frac{1}{k}I_n$. Pour $k > \frac{1}{\varepsilon}$, $D_k \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et on a clairement :

$$CD_k = C\left(D - \frac{1}{k}I_n\right) = CD - \frac{1}{k}C = DC - \frac{1}{k}C = D_kC$$

Posons $M_k = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_k \end{pmatrix}$. D'après la question 1.a, pour tout $k > \frac{1}{\varepsilon}$:

$$\det(M_k) = \det(AD_k - BC)$$

Par continuité de l'application déterminant et du produit matriciel, en faisant $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty}\det(M_k) = \det(M) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty}\det(AD_k - BC) = \det(AD-BC)$$

Par unicité de la limite, la relation $\det(M) = \det(AD-BC)$ reste vraie si D est non inversible.

(2) **a** Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $\chi_D(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.
Donc

$$\chi_D(D) = \chi_D\left(\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\right) = \text{diag}\left(\chi_D(\lambda_1),\dots,\chi_D(\lambda_n)\right) = \text{diag}(0,\dots,0) = 0$$

car, $\chi_D(\lambda_i) = 0$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

b Soit $A \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{K})$. Il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On a $\chi_A(X) = \chi_D(X)$. Ainsi :

$$\chi_A(A) = \chi_D(PDP^{-1}) = P\chi_D(D)P^{-1} = P\cdot 0\cdot P^{-1} = 0$$

Par conséquent, $\chi_A(A) = 0$ pour toute matrice A diagonalisable.

c L'application $\mathbb{K}_n[X]\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit $\left(\sum_{k=0}^{n} a_kX^k, A\right) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_kA^k$.
C'est une combinaison linéaire finie de produits d'applications bilinéaires continues (le produit scalaire et le produit matriciel). L'application est donc continue sur $\mathbb{K}_n[X]\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

d L'application $A \mapsto \chi_A$ est continue car les coefficients du polynôme caractéristique sont des polynômes en les coefficients de A (via la formule du déterminant). Par composition d'applications continues $A \mapsto (\chi_A, A) \mapsto \chi_A(A)$ est aussi continue.

e Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par densité de $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (Partie A, Q8), il existe une suite $(A_k) \subset \mathcal{D}_n^+(\mathbb{C})$ telle que $\lim_{k\to+\infty} A_k = A$. Par la question 2.b, $\psi(A_k) = \chi_{A_k}(A_k) = 0$ pour tout k. Par continuité de ψ (question 2.d) :

$$\chi_A(A) = \psi(A) = \psi\left(\lim_{k\to+\infty} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty}\psi(A_k) = 0$$

On conclut que $\chi_A(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3 **a** **Cas où A est inversible :**

- ☞ Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on peut écrire $BA = A^{-1}(AB)A$.
  Les matrices AB et BA sont donc semblables.
- ☞ Deux matrices semblables ayant le même polynôme caractéristique, on a :

$$\chi_{\mathbf{AB}}(\mathbf{X}) = \chi_{\mathbf{BA}}(\mathbf{X})$$

b **Extension au cas général :**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, la suite $A_k = A - \dfrac{1}{k} I_n$ fournit des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour tout $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (Partie A, Q2), et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$. Pour tout $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$, la matrice A_k étant inversible, la question 3.a assure que :

$$\chi_{A_k B}(X) = \chi_{B A_k}(X)$$

Soit $X \in \mathbb{K}$ fixé. L'application $M \mapsto \chi_M(X) = \det(XI_n - M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par continuité de la multiplication matricielle, $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k B = AB$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} BA_k = BA$. En passant à la limite $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} \chi_{A_k B}(X) = \chi_{AB}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} \chi_{B A_k}(X) = \chi_{BA}(X)$$

On en déduit que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$ pour tout $X \in \mathbb{K}$, d'où l'égalité polynomiale $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

FiN