Fiche de Cours : Réduction

Notations

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\dim E = n$.
- $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ base de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Matrices Blocs

Cas Triangulaire par blocs :

Si $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$, alors :

- $\det(M) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i)$.
- M inversible $\iff$ A_i est inversible, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.

Cas Diagonale par blocs : $M = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_r)$, alors

- $\det(M) = \prod_{i=1}^{r} \det(A_i)$.
- M inversible $\iff$ A_i est inversible, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.
  Dans ce cas $M^{-1} = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, \ldots, A_r^{-1})$
- $M^k = \operatorname{diag}(A_1^k, \ldots, A_r^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- $P(M) = \operatorname{diag}(P(A_1), \ldots, P(A_r))$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$.
  En particulier : $P(M) = 0 \Leftrightarrow P(A_i)$, $\forall i \in [\![1, r]\!]$.

2. Somme de sous-espaces vectoriels

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sev de E.

- **Somme :** $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.
- **Somme directe :**
  $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe $\Leftrightarrow F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
  Dans ce cas on écrit : $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ au lieu de $\sum_{i=1}^{p} F_i$
- **Thm** :
  $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe $\iff \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$.
- **Thm :** Si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, alors $\forall x_i \in F_i$, on a :
  $\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \implies x_i = 0$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$.
- **Base adaptée :** Si $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe, alors toute union de bases des F_i est une base de $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$,
  appelée base adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

3. Stabilité

- **Stabilité :**
  un sev F est stable par u ssi $u(F) \subset F$.
  Endomorphisme induit :
  Si F est stable par u, alors :
  - $u_{|F} : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$
    est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit par u sur F.
  - $\ker(u_{|F}) = \ker(u) \cap F$ et $\operatorname{Im}(u_{|F}) = u(F)$.
- **Commutativité :**
  Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont u-stables.
  En particulier :
  $\ker P(u)$ est stable par u, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
- **Matrice dans base adaptée :**
  - Si F est stable par u, si $E = F \oplus G$, alors pour toute $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base adaptée, on a :
    $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u_{|F})$
  - Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, avec F_i tous stables par u, alors pour toute $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ base adaptée, on a :
    $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_p)$ avec $A_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(u_{|F_i})$, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.

3. Théorème de Décomposition des Noyaux

- **Thm** : Si $P = P_1 P_2 \cdots P_k$ avec $P_i \wedge P_j = 1$ $(i \neq j)$, alors : $\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$.

  Si de plus $P(u) = 0$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker P_i(u)$.

  Dans ce cas : Si p_i est la projection sur $\ker P_i(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} \ker P_j(u)$. Alors
  - $\sum p_i = \mathrm{id}_E$
  - $p_i^2 = p_i$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
  - $p_i \circ p_j = 0$,pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$.
  - Chaque p_i est un polynôme en u.
- **Diagonalisation par blocs :** Toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs.

4. Valeurs propres et vecteurs propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Def :
$\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** (va.p.) ssi il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas

- $x \neq 0$ est un **vecteur propre** (v.p.) associé à λ.
- **Sous-espace propre :** $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.
- **Spectre :** $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid E_\lambda(u) \neq \{0\}\}$.
- $u^k(x) = \lambda^k x$, $\forall k \in \mathbb{N}$
- $P(u)(x) = P(\lambda)x$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$.

5. Polynôme minimal et caractéristique

- **Polynôme caractéristique :** $\chi_u(X) = \chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.
- **Thm :** χ_M est unitaire et $\deg(\chi_M) = n$.
  $\chi_M(X) = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.
- **Thm :** $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \implies \lambda$ est racine de tout polynôme annulateur P de u.
  Réciproque fausse en général !
- **Thm :** $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$.
- **Thm :** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(M)$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(M)$.
  où $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ vap de u comptées avec leur multiplicités dans $\mathbb{C}$.
- **Cayley-Hamilton :** $\chi_u(u) = 0$. Donc $\pi_u \mid \chi_u$.
- **Endomorphisme induit :** Si F est stable par u, $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.
- **Thm :** $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$,
  où m_λ est la multiplicité de λ dans χ_u.
- Si $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix}$,
  alors : $\chi_M = \prod_{i=1}^{r} \chi_{A_i}$.
- $M = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_r)$, alors :
  $\chi_M = \prod_{i=1}^{r} \chi_{A_i}$ et $\pi_M = \mathrm{ppcm}(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$.

6. Diagonalisation

- u est diagonalisable ssi elle existe $\mathcal{B}$ base de E tq $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale.
- u est diagonalisable ssi $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ l'est aussi.
- **Thm :**
  Si u est diagonalisable alors χ_u et π_u scindés.
  La réciproque est en général fausse.
- **Thm Fondamental :** Si χ_u est scindé, alors :
  u diagonalisable
  $\iff \exists \mathcal{B}$ base propre de u (formée par des vep de u)
  $\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$
  $\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$
  $\iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.
  $\iff u$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples
  $\iff \pi_u$ est scindé à racines simples
- **Thm :** $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable, alors
  D contient les vap et P contient les vep en colonnes.
- **Thm :** Si χ_u scindé à racines simples (i.e. card (Sp(u)) = n) alors u est diagonalisable
  La réciproque en général fausse.
- **Thm Spectral) :** Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable : $A = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = P^T$
- **Cas Nilpotent :** u nilpotent d'indice p
  $\Leftrightarrow u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0 \Leftrightarrow \pi_u = X^p$
  $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}(u) = \{0\} \Leftrightarrow \chi_u = X^n$.
  Dans ce cas : u est diagonalisable $\iff u = 0$.