Fiche de Cours : Intégration

Théorème : Règle des Équivalents

Si f et g garde un même signe Cte au vois de b^- :
Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$.
Alors :
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ sont de **même nature**.
Plus Précisément :

- ☞ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cvge ssi $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ cvge.
  Dans ce cas : $\int_x^b f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$
- ☞ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ divge ssi $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ divge.
  Dans ce cas : $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$

Démonstration (à retenir)

Quitte à considérer $-f$ et $-g$, on peut supposer sans perte de généralité que $f(t) > 0$ et $g(t) > 0$ au voisinage de b^-.

1. Équivalence des natures

Par définition de l'équivalence $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$, on a $\lim\limits_{t\to b^-} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $t \in [c, b[$:

$$\frac{1}{2}g(t) \le f(t) \le \frac{3}{2}g(t)$$

Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, les intégrales $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

2. Cas de convergence (Équivalence des restes)

Supposons que les deux intégrales convergent. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c_\varepsilon \in [a, b[$ tel que pour tout $t \in [c_\varepsilon, b[$:

$$(1-\varepsilon)g(t) \le f(t) \le (1+\varepsilon)g(t)$$

Pour $x \in [c_\varepsilon, b[$, en intégrant de x à b (avec $x < b$) :

$$(1-\varepsilon)\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \le \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \le (1+\varepsilon)\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t > 0$, on divise par cette quantité :

$$\forall x \in [c_\varepsilon, b[, \quad 1-\varepsilon \le \frac{\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t} \le 1+\varepsilon$$

Par passage à la limite quand $x \to b^-$, on en déduit que :

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Cas de divergence (Équivalence des Primitives)

Supposons que les deux intégrales divergent. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. On a $\lim_{x\to b^-} G(x) = +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $t \in [c, b[$:

$$(1-\varepsilon)g(t) \le f(t) \le (1+\varepsilon)g(t)$$

Pour tout $x \in [c, b[$, par Chasles :

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

En intégrant l'inégalité de c à x :

$$F(c)+(1-\varepsilon)(G(x)-G(c)) \le F(x) \le F(c)+(1+\varepsilon)(G(x)-G(c))$$

En divisant par $G(x) > 0$ pour x suffisamment proche de b^- :

$$\frac{F(c)}{G(x)}+(1-\varepsilon)\left(1-\frac{G(c)}{G(x)}\right) \le \frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(c)}{G(x)}+(1+\varepsilon)\left(1-\frac{G(c)}{G(x)}\right)$$

Comme $\lim\limits_{x\to b^-} G(x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{F(c)}{G(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{G(c)}{G(x)} = 0$. Par encadrement, on obtient $\lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{F(x)}{G(x)} = 1$, d'où :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

FiN