Fiche de Cours : Intégration

Partie 1 : Intégration Sur un Segment

1. Définitions de base

☞ **Subdivision :** Famille finie $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ t.q. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

☞ **Fonction Continue par Morceaux ($\mathcal{CM}$) :** $f \in \mathcal{CM}([a,b])$ s'il existe une subdivision σ telle que $f_{|]x_k, x_{k+1}[}$ soit continue et possède des limites finies à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}.

☞ **Sommes de Riemann** Si $f \in \mathcal{CM}([a,b])$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{dt}$$

Cas particulier : $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}.$

☞ **Thm :** Si $f[a,b] \to \mathbb{R}$ continue et positive.
Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = 0 \iff f = 0.$
N.B : La continuité de f et qu'elle garde un signe Cte sur $[a,b]$ sont des CN.

☞ **Inégalité de la Moyenne :** Si $f \in \mathcal{CM}([a,b])$.
Alors : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$
Si f est continue : Égalité ssi f garde un signe Cte.

2. Théorèmes Généraux

☞ **Cauchy-Schwarz :** Pour $f, g \in \mathcal{CM}([a,b])$:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{dt}\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{dt}\right)\left(\int_a^b g^2(t)\mathrm{dt}\right)$$

Si f, g sont continues : on a égalité ssi (f,g) est liée.

☞ **Intégration Par Parties Successives** :
Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[f^{(k)}(t)g^{(n-1-k)}(t)\right]_a^b \\ &+ (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,dt\end{aligned}$$

☞ **Taylor avec Reste Intégral :** Pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{dt}$$

☞ **Inégalité de Taylor-Lagrange :** Pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$:

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$$

☞ **Taylor-Young :** Pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}$, quand $x \to a$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Partie 2 : Intég. Sur un Intervalle Quelconque

1. Règles de Convergence

☞ **Cadre :**
$f \in \mathcal{CM}([a,b[)$, où $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

☞ **Définition :** $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ converge
ssi $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{dt}$ existe et soit finie.

☞ **Prolongement par continuité :**
Si f est prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ converge.

☞ **Intégrales de Riemann** : Pour tout $a > 0$

- ☞ $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ cvge $\iff \alpha > 1$.
- ☞ Pour $\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha}$ cvg $\iff \alpha < 1$.

☞ **Cas des Fonctions Positives** : Si $f \geq 0$ sur $[a,b[$: alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} \text{ cvge} \iff F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{dt} \text{ est majorée}$$

Dans le cas contraire, $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{dt} = +\infty$.

☞ **Cas des Fcts Négative** : Si $f \leqslant 0$ sur $[a,b[$: alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} \text{ cvge} \iff \int_a^x f(t)\mathrm{dt} \text{ est minorée}$$

Dans le cas contraire, $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{dt} = -\infty$.

2. Règles de Convergence Absolue

☞ **Définition :**
On dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ est absolument convergente (ou bien que f est intégrable sur $[a,b[$)
ssi $\int_a^b |f(t)|\mathrm{dt}$ converge.

☞ **Thm :** $\int_a^b |f(t)|\mathrm{dt}$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{dt}$.
Dans ce cas on a : $\left|\int_a^b f(t)\mathrm{dt}\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{dt}$.
N.B : La réciproque n'est pas toujours vraie.

☞ **Règles de Domination** Si au voisinage de b, on a $|f(t)| \leqslant |g(t)|$, ou bien $f = o(g)$, ou bien $f = O(g)$. Alors :

- ☞ $\int_a^b |g(t)|\,\mathrm{dt}$ cvge $\implies \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$ cvge.
- ☞ $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$ divge $\implies \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{dt}$ divge.

☞ **Règle des Croissances Comparées en 0**

- ☞ Si $\exists \alpha < 1$ tq. $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\int_0^\varepsilon |f(t)|\,\mathrm{dt}$ cvge.
- ☞ Si $\exists \alpha > 1$ tq. $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = \pm\infty$ alors $\int_0^\varepsilon |f(t)|\,\mathrm{dt}$ divge.
- ☞ **Limite usuelle :** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Règles de Convergence Absolue (suite)

☞ **Règle des Croissances Comparées en $+\infty$**

- ☞ Si $\exists \alpha > 1$ tq. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors $\int_A^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{dt}$ cvge.
- ☞ Si $\exists \alpha < 1$ tq. $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = \pm\infty$ alors $\int_0^\varepsilon |f(t)|\,\mathrm{dt}$ divge.
- ☞ **Limites usuelles :**
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-\beta x^\gamma} = 0$, pour tout $\beta > 0, \gamma > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

☞ **Règle des Équivalents**
Si f et g garde un même signe Cte au vois de b^- :
Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$.
Alors :
$\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ et $\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$ sont de **même nature**.
Plus Précisément :

- ☞ $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ cvge ssi $\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$ cvge.
  Dans ce cas : $\int_x^b f(t)\mathrm{dt} \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g(t)\mathrm{dt}$
- ☞ $\int_a^b f(t)\mathrm{dt}$ divge ssi $\int_a^b g(t)\mathrm{dt}$ divge.
  Dans ce cas : $\int_a^x f(t)\mathrm{dt} \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\mathrm{dt}$

N.B : La Condition de signe constant est OBLIGATOIRE