CPGE Ibn Ghazi
MP* II (Rabat)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

DM : EVN

Partie I : Decomposition Polaire

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, mq $\exists S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $S^2 = A$

2) Mq S est un polynôme en A

3) Mq $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset Gl_n(\mathbb{R})$

4) En deduire que S est unique. S s'appelle alors la racine carré de A et se note $\sqrt{A}$

5) Justifier que l'app
$$S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto \sqrt{A}$$
est bien definie et continue

6) Soit $A \in Gl_n(\mathbb{R})$

i) Mq $A^tA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

ii) En deduire que $\exists! O \in O(n)$, $\exists! S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A = OS$ (decomposition polaire)

iii) Mq l'app
$$\varphi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R})$$
$$(O, S) \longmapsto OS.$$
est un homeomorphisme cad φ bij cont, φ^{-1} cont

(Indic : pour la cont de φ^{-1} ; utiliser $O(n)$ compact)

7) Mq $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O(n)$, $\exists S \in S_n^{+}(\mathbb{R})$ tq $A = OS$

Indic : utliser $Gl_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{R})$

1

Partie II : Continuité des formes linéaires

Soit E evn et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ forme linéaire, Non nulle

1) On suppose φ est cont, Mq $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé

2) On suppose dans cette qst que ~~φ est~~ $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé et que φ est discont en 0

i) Mq $(\exists \varepsilon > 0)\ (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E)$ tq $\lim_{+\infty} x_n = 0$

$\|f(x_n)\| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) En déduire que $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tq $\lim_{+\infty} y_n = 0$

et $\varphi(y_n) = 1$

iii) En déduire une contradiction avec $\mathrm{Ker}\,\varphi$ fermé

3) Conclure que φ est cont $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\varphi$ fermé

4) Soit $x_0 \notin H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ (Justifier son existence)

i) Mq $E = H \oplus \mathbb{R}x_0$

ii) Que peut-on dire de $\overline{H}$

iii) Mq $\overline{H}$ sev de E

iv) En déduire que H est soit fermé, soit dense dans E

5) On suppose dans cette question $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ fermé et on considère $x_0 \notin H$

i) Mq $d(x_0, H) \geq \dfrac{|\varphi(x_0)|}{|||\varphi|||}$.

ii) Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E \setminus \{0_E\}$

tq $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} = |||\varphi|||$

iii) En deduire que $\dfrac{|\varphi(x_n)|}{\|x_n\|} \leq \dfrac{|\varphi(x_0)|}{|||\varphi|||}$

Indice : ecrire $x_n = h_n + \lambda_n x_0$ tq $h_n \in H = \mathrm{Ker}\,\varphi$

iv) En deduire que $\boxed{d(x_0, \mathrm{Ker}\,\varphi) = \dfrac{|\varphi(x_0)|}{|||\varphi|||}}$

6) Une application sur un exple

$E = \ell^0(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } \lim\limits_{+\infty} u_n = 0\}$

muni de $\|\cdot\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

et $\varphi : E \to \mathbb{R}$

$(u_n) \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^n}$

i) Mq φ forme lineaire non nulle et que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est fermé

ii) on pose $u_p = (\underbrace{1, \dots, 1}_{p \text{ fois}}, 0, \dots)$

calculer $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{\varphi(u_p)}{\|u_p\|_\infty}$

en deduire $|||\varphi|||$

iii) Mq $|||\varphi||| = \sup\limits_{u\neq 0} \dfrac{|\varphi(u)|}{\|u\|_\infty}$ où $u \in \ell^0(\mathbb{N})$

n'est pas atteinte

iv) en deduire que $d(u, H)$ n'est pas atteinte

où $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $u \in \ell^0(\mathbb{N})$

Fin