CPGE Ibn Ghazi
MP* 1 (Rabat)

Prof MAMOUNI
myismail.net

DM : EVN

Inspiré du Mines 1975

Dans toute la suite E est un $\mathbb{R}$-ev de dim finie $n \geq 2$

Partie I : Norme euclidienne CNS

On rappelle qu'une norme $\|\cdot\|$ sur E est dite euclidienne ssi elle est issue d'un $\langle , \rangle$: cad $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in E}$

Dans ce cas elle vérifie l'identité du parallélogramme

$$(*) \quad \boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall (x,y) \in E \times E}$$

1) Justifier que dans $\mathbb{R}^2$:

i) La norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne

ii) les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas

2) On suppose dans cette question que E est muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant $(*)$

on pose alors $\boxed{\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)} \quad \forall (x,y) \in E \times E$

i) Justifier que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \quad \forall (x,y) \in E \times E$

ii) " " $\varphi(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in E$

iii) " " $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

iv) Mq Soit $(x_1, x_2, y) \in E^3$

a) $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \frac{1}{8}\left(\|x_1 + x_2 + 2y\|^2 - \|x_1 + x_2 - 2y\|^2\right)$

b) $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \frac{1}{4}\left(\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2\right)$

c) $\varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) = \varphi(x_1 + x_2, y)$

v) En deduire que $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \varphi(x, y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

on Commencera par $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

vi) En deduire que $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne

Partie II : Projection sur un convexe fermé

Dans cette partie la norme $\|\cdot\|$ est supposé euclidienne

A est une partie de E convexe et ferme, non vide

$\boxed{\forall x \in E \text{, on pose } d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)}$

1) Mq il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tq $d(x, A) = \lim_{n \to +\infty} d(x, a_n)$

2) Mq $\forall (x, y, z) \in E^3$, on a

$$\boxed{\|x - y\|^2 + \|x - z\|^2 = 2\|x - m\|^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2 \quad \text{où } m = \frac{y + z}{2}}$$

3) En deduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall q \geq N$

on $\|a_p - a_q\| < \varepsilon$

4) En deduire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puis qu'elle converge vers un elt $a \in A$

et que cet $a \in A$ verifie $d(x, A) = d(x, a)$

5) On suppose dans cette question que il existe $b \in A$ tq $d(x, A) = d(x, b)$

Mq $a = b$ Indic : utiliser la qst II.2

$\boxed{\text{on pose alors } a = p_A(x), \text{ l'app } \begin{array}{l} E \longrightarrow A \\ x \longmapsto p_A(x) \end{array} \text{ est alors bien defini\'e et s'appelle projection sur } A}$

6) Soit $y \in A$ et $t \in]0,1[$, on pose $z = ty + (1-t)p_A(x)$

Mq $\langle y - p_A(x), x - p_A(x) \rangle \leq 0$

Indic : Utiliser $\|x - p_A(x)\|^2 \leq \|x - z\|^2$

7) i) Mq $\|p_A(x) - p_A(y)\|^2 \leq \langle x - y, p_A(x) - p_A(y) \rangle \quad \forall (x,y) \in E \times E$

ii) En deduire que l'app $x \longmapsto p_A(x)$ est lipsch puis continue

Partie III : Un exple en dim infinie

on pose $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$

1) Justifier que dim E est infinie

2) On pose $A = \{ f \in E \text{ tq } f \geq 0, f \downarrow, 1 \leq f(0) \leq 2$ et $\int_0^1 f(t)dt = f(0) - 1 \}$

i) Mq A convexe, fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

ii) Mq $d(0, A) = 1$

iii) Mq il n'existe pas de $f \in$ [redacted] tq $d(0, f) = 1$

3

FIN