CPGE Ibn Ghazi
MP*1 (Rabat)

Prof. MAMOUNI
myismail.net

DM : Suites de fcts

Theme : thm de ~~Bolzano~~ Stone-Weirstrass

l'objectif de ce problème est de demontrer de deux methodes differents le thm suivant

Thm de ~~Bolzano~~ Stone-Weirstrass

$\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont
$\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $P_n \xrightarrow{cu} f$ sur $[a,b]$

Methode 1 : Polynômes de Bernstein

Partie I

on pose $B_k(X) = (X-a)^k (b-X)^{n-k}$
$0 \leq k \leq n$

1) Mq $(B_k)_{0 \leq k \leq n}$ base de $\mathbb{R}_n[X]$

2) Dans la suite on prend $a=0$ et $b=1$
cad $B_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$
Justifier que
i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(X) = 1$
ii) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} B_k(X) = nX$

iii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-n) B_k(X) = n(n-1)X(X-1)$

iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-nX)^2 B_k(X) = nX(1-X)$

3) Dire pourquoi $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \alpha > 0)$ tq $\forall x, y \in [0,1]$

on a $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

4) On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} B_k(x)$ $\forall x \in [0,1]$

i) Mq $|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k(x)$

ii) Mq $\sum_{k \in I} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k(x) < \varepsilon$

où $I = \{ k \in [\![0,n]\!] \text{ tq } |x - \frac{k}{n}| < \alpha \}$

iii) Mq $\sum_{k \notin I} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_k(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_k(x)$

$\leq \frac{M}{2n\alpha^2}$

5) En déduire $P_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[0,1]$

6) traiter le cas gle $[a,b]$ où $a \neq 0$, $b \neq 1$

Methode 2 : Produit de convolution

on note $\mathcal{C}^0 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact $\}$

cad $f = 0$ en dehors d'un segment

1) Mq $\mathcal{C}^0$ s-alg de $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$

2) pour tout $f, g \in \mathcal{C}^0$ on pose

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Produit de convolution

i) Mq $*$ est une LCI sur $\mathcal{C}^0$

ii) Mq $(\mathcal{C}^0, +, \cdot, *)$ algebre commutative

3) On appelle fct de Dirac (toute suite fcts positives) $\delta_n \in \mathcal{C}^0$

tq $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t)\, dt = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \delta_n(t)\, dt = 0$

$\forall \alpha > 0$

---

i) Justifier que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0$ tq

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

ii) Justifier que

$$|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t) - f(x)|\, \delta_n(t)\, dt$$

iii) Justifier que $\displaystyle\int_{|t|\le\alpha} |f(x-t) - f(t)|\, \delta_n(t)\,dt \le \varepsilon$

iv) " " $\displaystyle\int_{|t|>\alpha} |f(x-t) - f(t)|\, \delta_n(t)\,dt \le 2\|f\|_\infty\, \varepsilon$

v) En deduire que $f * \delta_n \xrightarrow{cu} f$ sur $[a,b]$
(à condition que δ_n existe)

4) On suppose ici $[a,b] = [-1/2, 1/2]$

on pose $W_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,dt$

$$\delta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^n}{W_n} & \text{si } |t| \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i) Mq pour tout $0<\alpha<1$ on a

$$0 \le \int_{|t|>\alpha} \delta_n(t) \le 2(n+1)(1-a^2)^n$$

ii) En deduire que δ_n est une fct de Dirac
et que $\delta_n * f \xrightarrow{cu} f$ sur $(-1/2, 1/2)$

5) On se propose de mq ds cette question que
$$f * \delta_n \in \mathbb{R}[X]$$
i) Ecrire $\delta_n(x-t)$ sous la forme
$$\delta_n(x-t) = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)\, x^k$$
où $q_k(t)$ est un polynome en $\underline{t}$

ii) On deduire que
$$(f * \delta_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k x^k \quad \text{où } \lambda_k \in \underline{\mathbb{R}}$$

iii) Conclure

6) Dire Comment demontrer le thm Stone - W sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Fin

8