My Ismail Mamouni

http ://myismail.net

Devoir Maison

Équations différentielles

Mines 2023

Théorème de stabilité de Liapounov

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On note $\langle .|. \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{K}$ pouvant être $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Si u et v sont deux applications linéaires pour lesquelles la notation $u \circ v$ a un sens, alors on note uv l'application $u \circ v$. De plus, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E et k est un entier naturel non nul, u^k désigne l'application $u \circ \cdots \circ u$, où u apparaît k fois dans l'écriture. Par convention $u^0 = id_E$.
On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$. Cela entraîne que si $x_0 = 0$, alors la solution de ce système est la fonction nulle, et donc 0 est un point d'équilibre. Notons $d\varphi(0)$ l'application différentielle de φ en 0. L'objectif de ce problème est d'établir une condition suffisante sur le spectre de $d\varphi(0)$ pour assurer la stabilité de l'équilibre en ce point, et d'obtenir des informations quant à la dynamique des solutions au voisinage de ce point d'équilibre. Plus précisément, on établit le résultat suivant :

Théorème de Liapounov :
Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y' &= \varphi(y) \\ y(0) &= x_0 \end{cases},$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que toutes les valeurs propres complexes de $d\varphi(0)$ aient une partie réelle strictement négative. Alors il existe trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0, \tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \; \|f_{x_0}(t)\| \leqslant C e^{-\beta t} \|x_0\|,$$

où f_{x_0} est l'unique solution du système différentiel et $B(0, \tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Dans une première partie, on étudie une norme sur les endomorphismes des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^n$. Dans la seconde partie, on établit des résultats sur le système différentiel linéaire, en se servant des résultats de la partie A. Enfin, la troisième partie est consacrée à la démonstration du théorème de Liapounov. Cette dernière partie est très largement indépendante des deux premières, à l'exception du résultat obtenu à la fin de la partie B.

A.. Etude d'une norme sur $\mathcal{L}(E)$

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$. Soit u un endomorphisme de E.

1 ▷ Après avoir justifié l'existence des bornes supérieures, montrer que :

$$\sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} \|u(x)\|.$$

2 $\rhd$ On note $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$. Montrer que $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3 $\rhd$ Montrer qu'il s'agit d'une norme sous-multiplicative, c'est-à-dire que :

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad |||uv||| \leqslant |||u|||.|||v|||,$$

et en déduire une majoration de $|||u^k|||$, pour tout entier naturel k, en fonction de $|||u|||$ et de l'entier k.

B.. Etude de la stabilité en 0 du système linéaire

Dans cette partie, a désigne un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$.

4 $\rhd$ Montrer qu'il existe un entier naturel non nul r, des nombres complexes distincts λ_1, λ_2, ..., λ_r, ainsi que des entiers naturels non nuls m_1, m_2, ..., m_r, tels que :

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i,$$

où pour $i \in [\![1;r]\!]$, $E_i = Ker(a - \lambda_i id_{\mathbf{C}^n})^{m_i}$.

D'après la question précédente, si x est un élément de $\mathbf{C}^n$, il existe un unique r-uplet $(x_1, \dots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_i$. Fixons à présent $i \in [\![1;r]\!]$. On définit alors les endomorphismes :

$$p_i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^n & \rightarrow & E_i \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right. \quad \text{et} \quad q_i : \left| \begin{array}{ccc} E_i & \rightarrow & \mathbf{C}^n \\ x_i & \mapsto & x_i \end{array} \right. .$$

Par ailleurs, on note $|||.|||_i$ la norme sur $\mathcal{L}(E_i)$ introduite à la partie A, à savoir

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||u|||_i = \sup_{\substack{x\in E_i\\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$

On utilisera la notation $|||.|||_c$ pour $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Enfin, on notera a_i l'endomorphisme $p_i a q_i$.

5 $\rhd$ Montrer que, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, il existe une constante $C_i > 0$ telle que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E_i), \quad |||q_i u p_i|||_c \leqslant C_i |||u|||_i.$$

6 $\rhd$ Montrer que, pour $i \in [\![1;r]\!]$, E_i est stable par a.

7 $\rhd$ Soient $(i,j) \in [\![1;r]\!]^2$. Exprimer $p_i q_j$ puis $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i$ en fonction des endomorphimes $id_{\mathbf{C}^n}$ et id_{E_j}.

8 $\rhd$ Montrer que : $a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i$.

9 $\rhd$ En déduire que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i e^{ta_i} p_i.$$

10 $\rhd$ Montrer par ailleurs que :

$$\forall i \in [\![1;r]\!], \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta_i} |\!|\!|_i \leqslant |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |\!|\!| a_i - \lambda_i id_{E_i} |\!|\!|_i^k.$$

11 $\rhd$ En déduire l'existence d'un polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{ta} |\!|\!|_c \leqslant P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe(\lambda_i)},$$

où $Re(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

12 $\rhd$ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on notera u_A l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbf{R}^n$ et v_A l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à A, vue comme une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On conservera la notation $|\!|\!|.|\!|\!|_c$ pour la norme introduite à la partie A sur $\mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$ et on utilisera $|\!|\!|.|\!|\!|_r$ sur $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}), \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad |\!|\!| e^{tu_A} |\!|\!|_r \leqslant C |\!|\!| e^{tv_A} |\!|\!|_c.$$

Dans la suite de cette partie, on considère u un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sa matrice dans la base canonique. On notera par ailleurs, $Sp(A)$ le spectre complexe de A. Notons g_{x_0} l'unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ de :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & u(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

13 $\rhd$ Montrer que :

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n, \quad \lim_{t \to +\infty} \|g_{x_0}(t)\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Sp(A) \subset \mathbf{R}_-^* + i\mathbf{R}.$$

14 $\rhd$ On se place dans cette question dans le cas où toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative. Montrer alors qu'il existe deux constantes C_2 et α strictement positives telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad |\!|\!| e^{tu} |\!|\!|_r \leqslant C_2 e^{-\alpha t},$$

et en déduire une majoration de $\|g_{x_0}(t)\|$ pour $t \in \mathbf{R}_+$.

C.. Démonstration du théorème de Liapounov

On considère dans cette partie une application φ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$, et en notant $a = d\varphi(0)$, telle que toutes les valeurs propres de a aient une partie réelle strictement négative.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$. On s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \varphi(y) \\ y(0) & = & x_0 \end{array} \right. .$$

On admettra l'existence d'une solution de ce système définie sur $\mathbf{R}_+$, que l'on notera f_{x_0}.

15 ▻ Montrer que la fonction

$$b : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \left\langle e^{ta}(x) | e^{ta}(y) \right\rangle dt \end{array} \right.$$

est bien définie et qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$.

On notera q la forme quadratique associée à b, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $q(x) = b(x, x)$.

16 ▻ Démontrer alors que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n, \quad dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2.$$

Pour toute fonction y définie sur $\mathbf{R}_+$, on associe la fonction $\varepsilon(y)$ définie par :

$$\varepsilon(y) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \to & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & \varphi(y(t)) - a(y(t)) \end{array} \right. .$$

17 ▻ Vérifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad q(f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0}(t))).$$

18 ▻ Prouver l'existence de deux nombres réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait :

$$q(f_{x_0}(t)) \leqslant \alpha \quad \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \leqslant -\beta q(f_{x_0}(t)).$$

On fixe un tel couple (α, β) pour la suite de ce problème.

19 ▻ Montrer alors que :

$$q(x_0) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \forall t \geqslant 0, \ q(f_{x_0})(t) \leqslant e^{-\beta t} q(x_0).$$

20 ▻ En déduire l'existence de trois constantes $\tilde{\alpha}$, C et β strictement positives telles que :

$$\forall x_0 \in B(0,\tilde{\alpha}), \quad \forall t \in \mathbf{R}_+, \ \|f_{x_0}(t)\| \leqslant Ce^{-\frac{\beta}{2}t}\|x_0\|,$$

où $B(0,\tilde{\alpha})$ désigne la boule ouverte, pour la norme $\|.\|$, de centre 0 et de rayon $\tilde{\alpha}$.

Fin du problème

Mines 1 MP 2023 – Corrigé

Rédigé par Frédéric Denizet, professeur au lycée Fénelon

Remarque : la notion de produit scalaire sur un $\mathbb{C}$–espace vectoriel n'est pas au programme de MP, le sujet est donc hors programme dès la première phrase. Ce problème est manifeste à la question 12 où il faut manipuler, en les différenciant, les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$. Il est ainsi difficile d'envisager qu'un candidat, même bien préparé en conformité au programme de MP, puisse traiter correctement cette question.
A l'inverse, les normes subordonnées sont au au programme de MP depuis cette session 2023, les questions 1 à 3 relèvent donc de pures questions de cours.

1. *Remarque :, il faut évidemment supposer que $E \neq \{0\}$ pour que les questions 1, 2 et 3 soient cohérentes.*

   Notons $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, S est une sphère de E donc un fermé borné de E et donc un compact de E (car E est de dimension finie).

   u est continue sur E car linéaire (et E de dimension finie), donc $x \mapsto \|u(x)\|$ est continue (la norme est lipschitzienne donc continue), le théorème des bornes atteintes assure que cette fonction admet un maximum sur S.

   On a donc justifie l'existence de $\underset{x\in E,\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|u(x)\|$ (et c'est un maximum).

   Par ailleurs pour tout $y \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|u(y)\|}{\|y\|} = \left\|u\left(\dfrac{y}{\|y\|}\right)\right\|$ où $\dfrac{y}{\|y\|} \in S$

   donc $\dfrac{\|u(y)\|}{\|y\|} \leq \underset{x\in E,\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|u(x)\|$.

   On a donc justifié l'existence de de $\underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et l'inégalité $\underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leq \underset{x\in E,\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|u(x)\|$.

   Enfin, pour tout $y \in S$, $\|u(y)\| = \dfrac{\|u(y)\|}{\|y\|} \leq \underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$,

   d'où $\underset{x\in E,\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|u(x)\| \leq \underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et finalement $\underset{x\in E,\|x\|=1}{\mathrm{Sup}} \|u(x)\| = \underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

2. $|||.|||$ est définie de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifions qu'elle satisfait aux propriétés d'une norme :

   Séparation : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| = 0$.

   On a $\underset{x\in E,x\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = 0$ donc, pour tout $x \in E$, $u(x) = 0$ (immédiat pour $x = 0$) ce qui assure $u = 0$.

   Homogénéité : soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

   Si $\lambda = 0$ on a $|||\lambda u||| = 0 = |\lambda|\,|||u|||$.

   Si $\lambda \neq 0$, pour tout $x \in S$, $\|\lambda u(x)\| = |\lambda|\,\|u(x)\| \leq |\lambda|\,|||u|||$ d'où $|||\lambda u||| \leq |\lambda|\,|||u|||$.

   Réciproquement, pour tout $x \in S$,$\|u(x)\| = \dfrac{1}{|\lambda|}\|\lambda u(x)\| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}|||\lambda u|||$ d'où

   $|||u||| \leq \dfrac{1}{|\lambda|}|||\lambda u|||$ i.e. $|\lambda|\,|||u||| \leq |||\lambda u|||$ et finalement $|||\lambda u||| = |\lambda|\,|||u|||$.

   Inégalité triangulaire : soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

   Pour tout $x \in S$,$\|(u+v)(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq |||u||| + |||v|||$,

   d'où $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$

En conclusion, $|||.|||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.

3. On remarque que par définition de $|||.|||$, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ on a, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq |||u|||\,\|x\|$ (u est $|||u|||$–lipschitzienne).
   Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
   Pour tout $x \in S$,$\|(uv)(x)\| = \|u(v(x))\| \leq |||u|||\,\|v(x)\| \leq |||u|||\,|||v|||$.
   On a donc $\boxed{|||uv||| \leq |||u|||\,|||v|||}$.
   Une récurrence simple assure alors que, pour tous $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{|||u^k||| \leq |||u|||^k}$.
4. *Remarque : il faut définir les E_i tels qu'ils soient distincts de $\{0\}$ pour que la suite soit cohérente.*
   Le polynôme caractéristique χ_a de a est scindé donc s'écrit sous la forme
   $\chi_a = \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)^{m_k}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de a d'ordres $m_1, \dots, m_r$.
   Par théorème de Cayley–Hamilton et lemme de décomposition des noyaux (les $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont premiers entre eux) on alors $\boxed{E = \ker(\chi_a(a)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker{(a - \lambda_k Id)^{m_k}}}$.
5. *Remarque : pour $i \in [\![1, r]\!]$, p_i et q_i sont des applications linéaires mais pas des endomorphismes, on peut noter que $q_i p_i$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ et est plus précisément le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, ce qui sera plus explicite à la question 7.*
   Soit $i \in [\![1, r]\!]$, posons $C_i = |||q_i p_i|||_c$.
   Soient $u \in \mathcal{L}(E_i)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\| = 1$, alors :
   $\|q_i u p_i(x)\| = \|u(p_i(x))\| \leq |||u|||_i\,\|p_i(x)\| = |||u|||_i\,\|q_i p_i(x)\| \leq |||u|||_i |||q_i p_i|||_c \leq C_i |||u|||_i$.
   On a donc $\boxed{|||q_i u p_i|||_c \leq C_i |||u|||_i}$.
6. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, E_i est le noyau d'un polynôme en a qui commute avec a donc E_i est stable par a.
7. Soit $i \in [\![1, r]\!]$, par définition p_i est nul sur $\bigoplus_{j \neq i} E_j$ ce qui assure que pour tout $j \neq i$, $\boxed{p_i q_j = 0}$, par ailleurs pour tout $x \in E_i$, $p_i q_i(x) = p_i(x) = x$ i.e. $\boxed{p_i q_i = Id_{E_i}}$.
   Soit $x \in E$ qu'on décompose comme $x = x_1 + \dots, x_r$ où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in E_i$, alors $\sum_{i=1}^{r} q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} q_i(x_i) = \sum_{i=1}^{r} x_i = x$, i.e. $\boxed{\sum_{i=1}^{r} q_i p_i = Id_{C^n}}$.
8. Soit $x \in E$, alors : $\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i a q_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(a(q_i p_i(x)))$.
   Or, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $a(q_i p_i(x)) \in E_i$ donc $p_i(a(q_i p_i(x))) = a(q_i p_i(x))$, et ainsi :
   $\sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i(x) = \sum_{i=1}^{r} a(q_i p_i(x)) = a\left(\sum_{i=1}^{r} q_i p_i(x)\right) = a(x)$.
   On a bien $\boxed{a = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i p_i}$.

9. Montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k p_i}$.

Initialisation : pour $k = 0$, $a^0 = Id_{C^n} = \sum_{i=1}^{r} q_i p_i = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^0 p_i$

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $a^k = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k p_i$, alors :

$$a^{k+1} = a^k a = \left(\sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} q_j a_j p_j\right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} q_i a_i^k p_i q_j a_j p_j.$$

À l'aide de 7 on a donc $a^{k+1} = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k a_i p_i = \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^{k+1} p_i$, ce qui achève la récurrence.

Soit $t \in R$, $\mathrm{e}^{ta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} a^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \sum_{i=1}^{r} q_i a_i^k p_i\right)$.

Par continuité de l'application (linéaire en dimension finie) $u \in \mathcal{L}(E_i) \mapsto \sum_{i=1}^{r} q_i u p_i$ on a donc $\boxed{\mathrm{e}^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} a_i^k p_i = \sum_{i=1}^{r} q_i \mathrm{e}^{ta_i} p_i}$.

10. Soient $i \in [\![1, r]\!]$ et $t \in R$, alors puisque $t\lambda_i Id_{E_i}$ et $t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})$ commutent on a :
$e^{ta_i} = e^{t\lambda_i Id_{E_i} + t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = e^{t\lambda_i Id_{E_i}} e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = e^{t\lambda_i} e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})}$;
d'où $|||e^{ta_i}|||_i = \left|e^{t\lambda_i}\right| \, |||e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})}|||_i$.

Par définition on a $(a_i - \lambda_i Id_{E_i})^{m_i} = 0$ donc $e^{t(a_i - \lambda_i Id_{E_i})} = \sum_{k=0}^{m_i - 1} \frac{t^k}{k!} (a_i - \lambda_i Id_{E_i})^k$ puis :

$$|||e^{ta_i}|||_i \leq \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||(a_i - \lambda_i Id_{E_i})^k|||_i \leq \left|e^{t\lambda_i}\right| \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|t|^k}{k!} |||a_i - \lambda_i Id_{E_i}|||_i^k.$$

11. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, posons $P_i = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{|||a_i - \lambda_i Id_{E_i}|||_i^k}{k!} X^k$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{ta} = \sum_{i=1}^{r} q_i \mathrm{e}^{ta_i} p_i$ donc $|||\mathrm{e}^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^{r} |||q_i \mathrm{e}^{ta_i} p_i|||_c \underset{5.}{\leq} \sum_{i=1}^{r} C_i |||\mathrm{e}^{ta_i}|||_i$.

Ainsi à l'aide de 10 : $|||\mathrm{e}^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^{r} C_i \left|e^{t\lambda_i}\right| P_i(|t|)$.

Posons alors $P = \sum_{i=1}^{r} C_i P_i$ (c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$), on a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $C_i \geq 0$ et $P_i(x) \geq 0$ donc $C_i P_i(x) \leq P(x)$.
Ainsi $|||\mathrm{e}^{ta}|||_c \leq \sum_{i=1}^{r} \left|e^{t\lambda_i}\right| P(|t|) = P(|t|) \sum_{i=1}^{r} \left|e^{t\lambda_i}\right| = P(|t|) \sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$.

12. **Question hors programme**
Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on a :

— pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|u_M(X)\| = \|MX\| = X^T M^T M X$ donc :
$|||u_M|||_r = \underset{X\in\mathbb{R}^n, X^T X=1}{\text{Sup}} (X^T M^T M X)$;

— pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $\|u_M(X)\| = \|MX\| = \overline{X}^T M^T M X$ donc :
$|||v_M|||_c = \underset{X\in\mathbb{C}^n, \overline{X}^T X=1}{\text{Sup}} (\overline{X}^T M^T M X)$;

Tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ pouvant être considéré dans $\mathbb{C}^n$ on a donc $|||u_M|||_r \leq |||v_M|||_c$.
Il suffit alors de remarquer que e^{tA} est à la fois la matrice canoniquement associée à e^{tu_A} dans $\mathbb{R}^n$ et à e^{tv_A} dans $\mathbb{C}^n$ (c'est au programme et cela découle directement de la continuité de l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé) pour obtenir que $\boxed{|||\mathrm{e}^{tu_A}|||_r \leq |||\mathrm{e}^{tv_A}|||_c}$.

13. Montrons cette équivalence par double implication, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A d'ordres $m_1, \ldots, m_r$.

$\Leftarrow$: on suppose que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a, pour tout $t \in R$, $g_{x_0}(t) = \mathrm{e}^{tu}(x_0) = \mathrm{e}^{tu_A}(x_0)$ donc :
$\|g_{x_0}(t)\| \leq |||\mathrm{e}^{tu_A}|||_r \|x_0\| \leq |||\mathrm{e}^{tv_A}|||_c \|x_0\|$.
On applique alors la question 12 pour « $a = v_A$ » : $\|g_{x_0}(t)\| \leq \|x_0\| P(|t|) \displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$.
Par hypothèse on a, pour tout $i \in [\![1, r]\!], \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ ce qui assure par croissances comparées que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} (\|g_{x_0}(t)\|) = 0$.

$\Rightarrow$: par contraposée, on suppose donc qu'il existe $\lambda \in Sp(A)$ avec $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$.
Soit $Z \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à λ on a $AZ = \lambda Z$ ce qui assure que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k Z = \lambda^k Z$ puis $\mathrm{e}^{tA} Z = \mathrm{e}^{t\lambda} Z$.
De plus $A\overline{Z} = \overline{AZ} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$ puis $\mathrm{e}^{tA}\overline{Z} = \mathrm{e}^{t\overline{\lambda}}\overline{Z}$.

— Premier cas : $\lambda \in \mathbb{R}$.
On peut considérer $X_0 = Z$ vecteur propre réel de A associé à λ et on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g_{X_0}(t) = \mathrm{e}^{tA} X_0 = \mathrm{e}^{t\lambda} X_0$ donc $\|g_{X_0}(t)\| = \mathrm{e}^{t\lambda} \|X_0\| \geq \|X_0\|$ ce qui assure que $\|g_{X_0}(t)\|$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

— Second cas : $\lambda \notin \mathbb{R}$.
Posons $X_0 = Z + \overline{Z}$ on a $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$g_{X_0}(t) = \mathrm{e}^{tA} X_0 = \mathrm{e}^{tA} Z + \mathrm{e}^{tA}\overline{Z} = \mathrm{e}^{t\lambda} Z + \mathrm{e}^{t\overline{\lambda}}\overline{Z} = \mathrm{e}^{t\mathrm{Re}(\lambda)}(\mathrm{e}^{it\mathrm{Im}(\lambda)} Z + \mathrm{e}^{-it\mathrm{Im}(\lambda)}\overline{Z})$
$= 2\mathrm{e}^{t\mathrm{Re}(\lambda)}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{Im}(\lambda)} Z\right)$.
Donc $\|g_{X_0}(t)\| \geq 2\left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{Im}(\lambda)} Z\right)\right\|$.
Z a au moins une coordonnée z_k non nulle dont on note θ un argument on a alors :
$\left\|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{Im}(\lambda)} Z\right)\right\| \geq \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{it\mathrm{Im}(\lambda)} z_k\right)\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(t\mathrm{Im}(\lambda)+\theta)} |z_k|\right)\right| = |z_k| \left|\cos(t\mathrm{Im}(\lambda) + \theta)\right|$,
où $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$ ce qui assure que $\|g_{X_0}(t)\|$ ne tend pas vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

14. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres complexes de A d'ordres $m_1, \ldots, m_r$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{tu} = \mathrm{e}^{tu_A}$ donc :

$|||\mathrm{e}^{tu}|||_r = |||\mathrm{e}^{tu_A}|||_r \leq |||\mathrm{e}^{tv_A}|||_c \leq P(|t|)\displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}$ (on a de nouveau appliqué la question 12 pour « $a = v_A$ »).

Posons alors $\gamma = \min\{-\mathrm{Re}(\lambda_i) \mid i \in [\![1, r]\!]\}$, par hypothèse $\gamma > 0$ et on a, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $t\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq -\gamma t$ donc $|||\mathrm{e}^{tu}|||_r \leq P(|t|)\displaystyle\sum_{i=1}^{r} e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} \leq P(|t|)\sum_{i=1}^{r} e^{-\gamma t} = rP(|t|)e^{-\gamma t}$.

Posons alors $\alpha \in]0, \gamma[$, on a $|||\mathrm{e}^{tu}|||_r \leq \mathrm{e}^{-\alpha t}(rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t})$.

Or $\alpha - \gamma < 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t}\right) = 0$, par continuité de la fonction $h : t \mapsto rP(|t|)e^{(\alpha-\gamma)t}$ et théorème des bornes atteintes, on en déduit que cette fonction h est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (exercice classique que je ne détaille pas), on note alors C_2 un majorant de h sur $\mathbb{R}_+$ et on a bien : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, |||\mathrm{e}^{tu}|||_r \leq C_2\mathrm{e}^{-\alpha t}}$.

On obtient directement : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \|g_{x_0}(t)\| = \left\|\mathrm{e}^{tu}(x_0)\right\| \leq |||\mathrm{e}^{tu}|||_r \|x_0\| \leq C_2\mathrm{e}^{-\alpha t}\|x_0\|}$.

15. Montrons que la fonction b est bien définie, on pose x et y dans $\mathbb{R}^n$.

Par inégalité de Cauchy-Schwartz et en utilisant la question 14 on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$\left|\left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(y)\right\rangle\right| \leq \left\|\mathrm{e}^{ta}(x)\right\|\left\|\mathrm{e}^{ta}(y)\right\| \leq C_2^2\|x\|\|y\|\mathrm{e}^{-2\alpha t}$, où $\alpha > 0$ donc $\mathrm{e}^{-2\alpha t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ce qui assure l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t \mapsto \left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(y)\right\rangle$ (qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ par composition) et donc la bonne définition de $b(x, y)$.

Vérifions que b est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:

symétrie : immédiat par symétrie du produit scalaire $\langle .|. \rangle$;

bilinéarité : immédiat par linéarité de l'intégrable, linéarité de e^{ta} et bilinéarité de $\langle .|. \rangle$;

positivité : soit $x \in \mathbb{R}^n$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(x)\right\rangle \geq 0$ donc $b(x, x) \geq 0$;

caractère défini : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $b(x, x) = 0$, la fonction $t \mapsto \left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(x)\right\rangle$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(x)\right\rangle = 0$ donc $\mathrm{e}^{ta}(x) = 0$, notamment pour $t = 0$ on obtient $x = 0$.

En conclusion, b est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

16. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$q(x + h) = b(x + h, x + h) = b(x, x) + 2b(x, h) + b(h, h) = q(x) + 2b(x, h) + b(h, h)$.

b étant bilinéaire sur un espace de dimension finie, il existe une constante Δ telle que, pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|b(u, v)| \leq \Delta\|u\|\|v\|$ et donc $|b(h, h)| \leq \Delta\|h\|^2$ ce qui assure que $b(h, h) = \underset{h\to 0}{o}(h)$.

Par ailleurs $h \mapsto b(x, h)$ est linéaire, on a donc justifié que q était différentiable en x avec $dq(x) : h \mapsto 2b(x, h)$.

On a donc : $\boxed{dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x))}$.

Par ailleurs la fonction $\phi : t \mapsto \mathrm{e}^{ta}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\phi' : t \mapsto \mathrm{e}^{ta}a(x)$; cela assure que la fonction $\psi : t \mapsto \left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}(x)\right\rangle$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\psi' : t \mapsto 2\left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}a(x)\right\rangle$.

On a donc $2b(x, a(x)) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 2\left\langle \mathrm{e}^{ta}(x)|\mathrm{e}^{ta}a(x)\right\rangle = \int_0^{+\infty}\psi'(t) = [\psi(t)]_0^{+\infty}$.

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(\psi(t)) = 0$ (cf 15) et $\psi(0) = \|x\|^2$, on obtient finalement :

$\boxed{dq(x)(a(x)) = 2b(x, a(x)) = -\|x\|^2}$.

17. *Remarque : la notation utilisée par le sujet est abusive puisque $q(f_{x_0})$ n'est pas défini, il faudrait utiliser $q \circ f_{x_0}$.*
Soit $t \in \mathbb{R}_+$ par différenciation d'une composée d'applications différentiables on a :
$(q \circ f_{x_0})'(t) = dq(f_{x_0}(t))(f'_{x_0}(t)) = 2b(f_{x_0}(t), f'_{x_0}(t))$, où par définition de f_{x_0} on a $f'_{x_0}(t) = \varphi(f_{x_0}(t))$ donc $(q \circ f_{x_0})'(t) = 2b(f_{x_0}(t), \varphi(f_{x_0}(t)))$.
Or $\varphi(f_{x_0}(t)) = \varepsilon(f_{x_0})(t) + a(f_{x_0}(t))$ donc :
$(q \circ f_{x_0})'(t) = 2b(f_{x_0}(t), a(f_{x_0}(t))) + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t))$ où on a $2b(f_{x_0}(t), a(f_{x_0}(t)) = -\|f_{x_0}(t)\|^2$ (cf 16) ce qui donne finalement $\boxed{(q \circ f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t))}$.
18. $\|\|$ et $\sqrt{q}$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension finie, elles sont donc équivalentes, on peut ainsi poser μ et ν dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\boxed{\mu\sqrt{q(x)} \le \|x\| \le \nu\sqrt{q(x)}}$.
(On conservera ces notations pour toutes les questions suivantes).
Soit $x \in \mathbb{R}^n$, alors par inégalité de Cauchy-Schwarz :
$b(x, \phi(x) - a(x)) \le \sqrt{q(x)}\sqrt{q(\phi(x) - a(x))}$
Or $\phi(x) - a(x) = \phi(x) - (\phi(0) + d\phi(0)(x)) = \|x\|\,\theta(x)$ où $\lim\limits_{x \to 0}(\theta(x)) = 0$ (développement limité en 0),
donc $\sqrt{q(\phi(x) - a(x))} = \sqrt{q(\|x\|\,\theta(x))} = \|x\|\,\sqrt{q(\theta(x))}$ où $\lim\limits_{x \to 0}(q(\theta(x))) = 0$,
enfin $\|x\| \le \nu\sqrt{q(x)}$, on obtient finalement :
$b(x, \phi(x) - a(x)) \le \nu q(x)\sqrt{q(\theta(x))}$ où $\lim\limits_{x \to 0}(q(\theta(x))) = 0$.
On en déduit que :
$-\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \le -\mu^2 q(x) + 2\nu q(x)\sqrt{q(\theta(x))} \le q(x)(-\mu^2 + 2\nu\sqrt{q(\theta(x))})$
Or $\lim\limits_{x \to 0}(q(\theta(x))) = 0$ donc il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour $\|x\| \le \alpha_0$, on ait :
$-\mu^2 + 2\nu\sqrt{q(\theta(x))} < -\dfrac{\mu^2}{2}$.
Posons $\beta = \dfrac{\mu^2}{2}$ on a $\beta > 0$ et on a montré que :
$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| \le \alpha_0,\ -\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \le -\beta q(x)}$.
Posons alors $\alpha = \left(\dfrac{\alpha_0}{\nu}\right)^2$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $q(x) \le \alpha$:
$\|x\| \le \nu\sqrt{q(x)} \le \nu\sqrt{\alpha} \le \alpha_0$ et donc $-\|x\|^2 + 2b(x, \phi(x) - a(x)) \le -\beta q(x)$.
On ainsi notamment pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:
$q(f_{x_0}(t)) \le \alpha \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \phi(f_{x_0}(t)) - a(f_{x_0}(t))) \le -\beta q(f_{x_0}(t))$;
c'est-à-dire avec la définition de ε :
$\boxed{q(f_{x_0}(t)) \le \alpha \Rightarrow -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \le -\beta q(f_{x_0}(t))}$.
19. Supposons que $q(x_0) < \alpha$, on rappelle que $f_{x_0}(0) = x_0$ on a donc $q(f_{x_0}(0)) < \alpha$.
Par continuité de $q \circ f_{x_0}$ il existe $u > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, u]$, $q(f_{x_0}(t)) < \alpha$.
Posons alors $\boxed{I = \left\{u \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall t \in [0, u], q(f_{x_0}(t)) < \alpha\right\}}$.
Soit $u \in I$ on a, pour tout $t \in [0, u]$, $q(f_{x_0}(t)) < \alpha$ et donc d'après les questions 17 et 18 :
$(q \circ f_{x_0})'(t) = -\|f_{x_0}(t)\|^2 + 2b(f_{x_0}(t), \varepsilon(f_{x_0})(t)) \le -\beta q(f_{x_0}(t))$.
En posant $h : t \mapsto q \circ f_{x_0}(t)$ on a donc : $\forall t \in [0, u]$, $h'(t) \le -\beta h(t)$ i.e. $h'(t) + \beta h(t) \le 0$; posons alors $k : t \mapsto h(t)\mathrm{e}^{\beta t}$ on a $\forall t \in [0, u]$, $k'(t) = (h'(t) + \beta h(t))\mathrm{e}^{\beta t} \le 0$ et donc k est décroissante sur $[0, u]$, ce qui assure que : $\forall t \in [0, u]$, $k(t) \le k(0)$ où $k(0) = h(0) = q(x_0)$.

On a donc montré que pour $u \in I$ on a : $\boxed{\forall t \in [0, u],\ q \circ f_{x_0}(t) = h(t) \leq q(x_0)\mathrm{e}^{-\beta t}}$.

I est une partie non vide de $\mathbb{R}_+^*$, montrons qu'elle n'est pas majorée par l'absurde, supposons donc qu'elle est majorée et notons v sa borne supérieure.
Pour tout $t \in [0, v[$, il existe $u \in I$ tel que $t \in [0, u]$ donc $q \circ f_{x_0}(t) \leq q(x_0)\mathrm{e}^{-\beta t} \leq q(x_0)$.
Par continuité de $q \circ f_{x_0}$ on a donc $q \circ f_{x_0}(v) \leq q(x_0) < \alpha$.
Mais alors toujours par continuité, il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $t \in [v, v + \gamma]$, $q \circ f_{x_0}(t) < \alpha$.
On a donc, pour tout $t \in [0, v+\gamma]$, $q \circ f_{x_0}(t) < \alpha$ i.e. $v+\gamma \in I$, ce qui contredit la définition de v et achève la démonstration par l'absurde.
I n'est pas majoré donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, il existe $u \in I$ tel que $t \in [0, u]$ et ainsi : $\boxed{q(f_{x_0}(t)) \leq q(x_0)\mathrm{e}^{-\beta t}}$.

20. Posons $\widetilde{\alpha} = \mu\sqrt{\alpha}$ alors, pour tout $x_0 \in B(0, \widetilde{\alpha})$ on a $q(x_0) \leq \dfrac{1}{\mu^2}\|x_0\|^2 < \dfrac{1}{\mu^2}\widetilde{\alpha}^2 = \alpha$.
Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, en appliquant le 19 :
$\|f_{x_0}(t)\| \leq \nu\sqrt{q(f_{x_0}(t))} \leq \nu\sqrt{q(x_0)}\mathrm{e}^{\frac{-\beta}{2}t} \leq \dfrac{\nu}{\mu}\|x_0\|\,\mathrm{e}^{\frac{-\beta}{2}t}$.
On a bien le résultat voulu en posant $C = \dfrac{\nu}{\mu}$.