Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits Mines-Telecom

Planche 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé simple.

1) Mq $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

2) Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$ tq $AB = BA$. Mq B est une combinaison linéaire de $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Planche 2

Oral IMT 2022 (MP).

Soit $n \geq 2$ dans $\mathbb{N}$. On pose $\Omega = [\![1, n]\!]$.

Si $m \in \Omega$, on pose : $A_m = \{k \in [\![1, n]\!] \ / \ m|k\}$.

Ω est muni de la probabilité uniforme.

1) Calculer $\mathbb{P}(A_m)$ lorsque $m|n$.

2) Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$ la DFP de n. Les évènements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont-ils indépendants ?

3) Soit $\varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1, n]\!] \ / \ k \wedge n = 1\}$. (indicatrice d'EULER)

Mq : $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Planche 3

<u>Oral IMT 2025 (MP).</u>

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Rayon et convergence de : $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$.

Planche 4

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $\mathrm{rg}(A) = 2$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Mq A est diagonalisable

Planche 5

Relations coefficients / racines

<u>Oral IMT 2019 (MP).</u>

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$.

1) Mq P' est aussi scindé simple dans $\mathbb{R}[X]$.

2) Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et de P'

Planche 6

<u>Oral Mines-Ponts 2023 (MP).</u>

Soient $\alpha > 1$ et $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (fonction zeta)

On définit la probabilité $\mathbb{P}_\alpha$ sur $\mathbb{N}^*$ par:

$\mathbb{P}_\alpha(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha).n^\alpha}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

Soit $A_m = \{qm \ / \ q \in \mathbb{N}^*\}$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

1) Calculer $\mathbb{P}_\alpha(A_m)$.

2) Soit $(p_k)_{k\leq 1}$ la suite croissante des nombres premiers.
Montrer que les A_{p_k} sont indépendants.

3) En déduire le produit eulérien :
$$\boxed{\zeta(\alpha) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1}}$$

Indications

Planche 1

① etape 1 : Mq $\chi_A(x) = \Pi_A(x)$

En effet $sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ = racine de $\Pi_A(x)$

avec $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)}_{\chi_A(x)}$ divise $\Pi_A(x) \Rightarrow \Pi_A(x) = \chi_A(x)$

car $\Pi_A \mid \chi_A$ et unitaires

etape 2 : Mq libre

$a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} = 0$

$\Rightarrow P(A) = 0$ où $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$

mais $\deg P < \deg \Pi_A = n$ d'où $P = 0$

d'où $a_k = 0 \ \forall k$

② etape 1 : $\dim C(A) = n$

$B \in C_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } MA = AM\}$

$\Rightarrow BA = AB$ avec $A = PDP^{-1}$

$\Rightarrow N = P^{-1}BA$ verifie $ND = DN$

$\Rightarrow n_{ij}\lambda_i = \lambda_j n_{ij}$ (calcul à connaitre)

$\Rightarrow n_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$

$\Rightarrow N = \mathrm{diag}(n_{11}, \dots, n_{nn})$ et $ND = DN$

$\Rightarrow B = PNP^{-1}$ tq

Ainsi

$C(A) \subset \{B = PNP^{-1} \text{ tq } N = \text{diagonale}\}$

l'autre inclusion facile car $ND = DN$ toujours vrai

d'où $C(A) = \{PNP^{-1} \text{ tq } N \text{ diagonale}\}$

$\boxed{\dim C(A) = n}$ car $\varphi : D_n(\mathbb{C}) \longrightarrow C(A)$ isom
$N \longmapsto PNP^{-1}$

<u>etape 2</u>

$Vect(I, A, \dots A^{n-1}) \subset C(A)$ et même dim

$\Downarrow$

$C(A) = Vect(I, A, \dots, A^{n-1})$

$\boxed{\text{Planche 2}}$

1) $A_m = \{m, 2m, \dots, qm\}$ tq $n = qm$

$$p(A_m) = \frac{\text{Card } A_m}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{q}{n} = \frac{1}{m}$$

2) $k \in A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} \iff p_i$ divise k $\forall i$.

$\iff \prod_{i=1} p_i$ divise k car $p_i \wedge p_j = 1$ $\forall i \neq j$

$\iff k \in A_{\prod_{i=1} p_i}$

$$p(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r}) = p(A_{\prod_{i=1} p_i}) = \frac{1}{\prod p_i} = \prod p(A_{p_i})$$

donc ~~sont~~ sont indépdts

3) $A = \{k \in [\![1,n]\!] \text{ tq } k \wedge n\} = \{k \in [\![1,n]\!] \text{ tq } k \wedge p_i = 1 \ \forall i\}$

car $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$

$$A = \bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\text{card} A}{\text{card}(\Omega)} = p(A) = p\left(\bigcap_{i=1}^{r} \overline{A_{p_i}}\right)$$ ↲ indepdt

$$= \prod p(\overline{A_{p_i}})$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Planche 3

$H_n \sim \ln(n)$ classique $\Rightarrow R = 1$ (D'Alembert)

$a_k = \frac{1}{k}$ et $b_k = 1$ $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} H_k x^k$

planche 4

A trig car $A \in M_n(\mathbb{C})$

$\text{rg} A = n \Rightarrow \dim \ker A = n-2 \Rightarrow 0$ vap de mult $\geq n-2$

$\text{Tr} A = 0 \Rightarrow \text{Sp} A = \{0, \lambda, -\lambda\}$

$A^n \neq 0 \Rightarrow A$ Non nilp $\Rightarrow \lambda \neq 0$ et $\lambda \neq -\lambda$

donc λ et $-\lambda$ de mult $= 1$

donc A diag car $\dim E_\lambda =$ mult

Planche 5

1) Classique : utiliser le TVI $\Rightarrow P'$ admet exact $n-1$ racines $\neq$tes

2) Formule de Viète Newton

$$\frac{1}{a_n} P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

où $\sigma_1 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ λ_i racine de P

on dérive

$$\frac{1}{n a_n} P'(x) = X^{n-1} - \frac{n-1}{n} \sigma_1 X^{n-2} + \cdots$$

donc $\sigma_1 \frac{(n-1)}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i$ μ_i racine de P'

$$\frac{\sum \lambda_i}{n} = \frac{\sum \mu_i}{n-1}$$

les Moyennes sont identiques

Planche 6

1) $P_\alpha(A_m) = \sum_{q=1}^{+\infty} P_\alpha\{qm\} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{(qm)^\alpha} = \frac{1}{m^\alpha}$

2) Mq $P\left(\bigcap_{\text{fini}} A_{p_k}\right) = \prod_{\text{fini}} P(A_{p_k})$

$P_\alpha(A_{p_1} \cap \dots A_{p_r}) = P\{x \mid p_k \text{ divise } x \ \forall i\}$

$= P\{x \mid \prod p_i \text{ divise } x\}$ car $p_i \wedge p_j = 1$

$= P\, A_{\prod p_i} = \frac{1}{(\prod p_i)^\alpha} = \prod P(A_{p_i})$

3) $\prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{N} P_\alpha(\overline{A_k}) \underset{\text{indepdt}}{=} P_\alpha\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_k}\right)$

qd $N \to +\infty$

$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1} = \lim_{N \to +\infty} P_\alpha\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_k}\right)^{-1}$

$= P_\alpha\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}\right)^{-1}$ (limite croissante)

$= P_\alpha\{x \text{ tq } p_k \text{ ne divise pas } x \ \forall k\}^{-1}$

$= P_\alpha\{x = 1\}^{-1} = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$

Fin

7