My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits Centrales Supélec

Planche 1

Trouver les matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
$A^T A^2 = A$
et $\mathrm{tr}(A) = n$.

Solution

on peut récrire l'équation en **$(A.A^T - I)\,A = 0$**.
Ainsi, **Im A est inclus dans Ker($A.A^T$ -I)** donc pour tout **x,y dans Im A**, on a

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle AA^T x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

, i.e. **A est orthogonale sur ImA.**

En particulier, A est de rang plein sur ImA donc **A(ImA) = ImA**
(une inclusion par definition de ImA, l'autre par egalite des dimensions),
Ainsi, ker A et ker $A^\perp$ = Im A sont stables par A, i.e. le sous-espace associe a la valeur propre 0 est le noyau de A sans partie nilpotente.
Donc A est semblable a une matrice bloc-diagonale avec un bloc orthogonal et un bloc nul,
Donc

$$\mathbf{sp(A)=\{0,\ \lambda=a+ib\ et\ \mu=a\text{-}ib\ et\ tq\ |\lambda| = 1\}}$$

et on peut conclure en calculant la trace :

$$\mathbf{n=Tr(u)=\sum Re(\lambda) \leq n}$$

car $|Re(\lambda)| \leq |\lambda| \leq 1$ (avec au maximum k valeurs possibles pour $Re(\lambda)$)

Ainsi **$n=\sum(Re(\lambda)=k$, donc la multiplicite de 0 est nulle, cad le bloc nul n'exitse même pas et**

$\sum(1-Re(\lambda))=0$, donc $Re(\lambda)=1$, donc $\lambda=1$ car $|\lambda| = 1$
Le théorème du cours sur la réduction d'une matrice orthogonale implique que le bloc orthogonal est I_n