

Préparation aux Oraux : Session 2026

Extraits CCINP

Planche 1

Énoncé exercice 6 8 points

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

12 points

Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire. Soit f une isométrie et on pose $g = f - \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Im } g = (\text{Ker } g)^\perp$
 2. On pose désormais $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$. Soit $y \in \text{Im } g$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n(y)\| = 0$.

3. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. A est-elle diagonalisable ? Donner une base or

thogonale ? Donner une base orthonormée de $\text{ker}(A - I_3)$. Donner la limite de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (X + AX + A^2X + \dots + A^{n-1}X)$$

Planche 2

Énoncé exercice 103 8 points

Remarque : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, +\infty[)^2$.
 Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
 On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .
 Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
 (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
 2. Soit $p \in]0, 1[$. Soit $\lambda \in]0, +\infty[$.
 Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
 On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ .
 On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p) .
 Déterminer la loi de X .

12 points

Soit u un endomorphisme de \mathbb{R}^{2n+1} tel que $u^3 = u$, $\text{Tr } u = 0$ et $\text{Tr } u^2 = 2n$.

On définit : $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) / u \circ v = v \circ u\}$.

- 1) u est-il diagonalisable ?
- 2) Déterminer les valeurs propres de u et les dimensions des sous espaces propres associés.
 Donner la matrice de u dans une base adaptée à sa diagonalisation.
- 3) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.
- 4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\mathcal{C}(u) = \mathbb{R}[u]$?

Planche 3

Exercice 1 8 points

Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$.

1. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

a. Prouver que $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

b. Prouver que: $\forall n \in \mathbb{N}, n^p \equiv n \pmod{p}$.

Indication : procéder par récurrence.

c. En déduire, pour tout entier naturel n , que : p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Il s'agit de l'exercice 86 de la banque.

Exercice 2 12 points

1. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n (2n)!}{(2n+1)!} x^n$ et en déduire celui de $\sum_{n \geq 1} \frac{4^n (2n)!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

On note S la somme de cette dernière série entière.

2. Justifier que S est dérivable sur son disque ouvert de convergence. Calculer explicitement $S'(x)$, pour x convenable, puis en déduire S .

Planche 4

Exercice 1 8 points

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .

On pose: $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1.

a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .

b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.

c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .

2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Il s'agit de l'exercice 37 de la banque.

Exercice 2 12 points

Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les conditions sur a telles que M soit inversible.

2. Déterminer les conditions sur a telles que M soit une matrice de projection.

On fait cette hypothèse dans la suite de cette question.

a. Déterminer $\ker(M)$ et $\text{Im}(M)$.

b. Est-ce que le projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à M est un projecteur orthogonal ?

c. La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, de la diagonalisabilité de M .