

## Préparation aux Oraux 2025

# Extraits CCINP

### Exercice 1

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 95)) Pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,

$$\text{on pose } \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

1. Montrer que l'intégrale est bien définie et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Soit  $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$  tel que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta(P) = P'$ .  
On note  $\delta^*$  l'adjoint de  $\delta$ . Montrer que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta^*(P) = XP - P'$ .
3. On pose  $H_0 = 1$  et  $\forall k \in \mathbb{N}, H_{k+1} = \delta^*(H_k)$ .  
Calculer  $H_1, H_2$  et  $H_3$ .
4. Montrer que  $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, \langle H_k, P \rangle = \langle H_0, P^{(k)} \rangle$ .
5. Montrer que  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}[X]$ .

### Exercice 2

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 99)) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n : x \mapsto nx^n(1-x)$

et  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  quand c'est défini.

1. (a) Etudier les convergences simples, uniformes et normales de  $\sum f_n$ .  
(b) Montrer que  $S$  est définie sur  $[0, 1]$  et continue sur  $[0, 1[$ .
2. (a) Expliciter  $S(x)$ .  
(b) Montrer que  $S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$ .  
(c)  $S$  est-elle continue en 1 ? Justifiez.

### Exercice 3

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 37)) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

$$\text{Soit } f : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto u \circ v.$$

1. Montrer que toute valeur propre de  $f$  est également valeur propre de  $u$ .
2. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $v$  un projecteur sur  $E_\lambda(u)$ .  
(a) Montrer que  $v$  est un vecteur propre de  $f$ .  
(b) En déduire que  $u$  et  $f$  ont le même spectre.
3. Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , on suppose que  $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$ .  
Montrer que  $f$  est diagonalisable ssi  $u$  est diagonalisable.

## Exercice 4

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 73)) Soit  $u_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n) dt$ .

1. Donner le développement en série entière de  $\ln(1 + t)$ .
2. Montrer, avec le théorème d'intégration terme à terme, que

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk + 1)}$$

3. Soit  $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$ .

(a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

(b) Déterminer  $u_n$  en fonction de  $f$ .

(c) On admet  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Montrer que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$ .

4. Montrer que  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\lambda}{n^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

5. Trouver  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  en fonction de  $\lambda$  tels que  $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ .

## Exercice 5

(CCINP MP 2024 (donné avec le CCINP 111)) Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .

Montrer qu'il existe un unique  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $B = A + \lambda I_2$  soit nilpotente.

2. Soit  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $e^{tA}$  et  $e^{tB}$ .

3. Résoudre le système d'équation différentiel  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ .

## Indications

EX1

1) facile

$$2) \langle S(\varphi), \varphi \rangle = \langle P', \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{P'(x)}_{u'} \underbrace{\varphi(x)}_v e^{-x^2/2} dx$$

$$\langle P, \delta^*(\varphi) \rangle \stackrel{\text{IPP}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) (x\varphi(x) - \varphi'(x)) e^{-x^2/2} dx$$

unfacteur de  $\delta^*$   $\rightarrow = \langle P, x\varphi - \varphi' \rangle$

$$\Rightarrow \delta^*(\varphi) = x\varphi - \varphi'$$

3) calcul

4) récurrence

$$5) \langle H_n, H_m \rangle = \langle H_0, H_m \rangle$$

mq  $\text{length} = m$   
 donc  $H_m^{(n)} = 0$  si  $n > m$

EX2

1) a) Classé

b) Classé

$$2) a) f(x) = (1-x)x \left( \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \right) = (1-x)x \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{1-x}$$

b) série de a

c) Mon  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$

(1)

124

- 1) Clamc
- 2) Clamc
- 3) Clamc

b)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)} = n \mu_n$

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \mu_n = f(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

$$= -\frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

$$= -\frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{12}$$

done  $\mu_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$

4)  $n \mu_n = f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{1}{n} f'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \mu_n = \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n^2} f'(0) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$A = f'(0), f(0) = \frac{\pi^2}{12}$

5)  $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{n t^{n-1}}{1+t^n} \cdot t dt$

IPP  $= \frac{1}{n} \left( \left[ \ln(1+t^n) \right]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \right)$

$$= \frac{\ln 2}{n} - \frac{\mu_n}{n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \frac{A}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(2)

Ex 5

$$1) \chi_A(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

$$\text{Sp}A = \{2\}$$

$$\chi_A(A) = 0 \Rightarrow (A - 2I)^2 = 0$$

$$\lambda = 2 \\ B^2 = 0$$

$$2) e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tB)^n}{n!} = I + tB \quad \text{car } B^2 = 0$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{tB - t\lambda I_2} = e^{tB} e^{-t\lambda I_2} \\ &= (I + tB) e^{-t\lambda} I_2 \\ &= e^{-t\lambda} (I + tB) \end{aligned}$$

$$3) \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow X' = AX \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = e^{tA} X_0 \quad \text{avec } X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X(t) = e^{-t\lambda} (I + tB) X_0 \quad \text{si } \beta = \frac{ct}{e}$$

(3)