Td : Arithmétique dans IK[X]

Extraits de Concours

My Ismail Mamouni
http ://myismail.net

Exercice 1 (e3a 2014)

Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_0 = 1,\ T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$

Montrer que $\forall\,\theta \in \mathbb{R}\,,\quad T(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n .

2. Soit $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \ldots, x_n)$, c'est à dire les polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui, pour tous i et j dans $[|1, n|]$, vérifient $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$

2.a. $\mathcal{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.b. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(x_i) \quad \text{avec} \quad \forall j \in [|1, n|],\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

2.c. Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

i. Justifier l'existence et l'unicité deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $R = ST_n + U$.

ii. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R(x_i)$$

Exercice 2 (CCP 2023)

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, . Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathscr{E} = (1, X-\alpha, \ldots, (X-\alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.

Donner avec démonstration la décomposition de P dans la base $\mathscr{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.

Déterminer le quotient et le reste de la division cuclidienne de P par $(X-\alpha)^r$.

Donner avec démonstration la décomposition de α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.

Exercice 3 (Mines 2018)

Pour tout $A = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ de $\mathbb{Z}[X]$, on note $\delta(A)$ le pgcd des coefficients a_k.

On dit que A est un polynôme *primitif* si $\delta(A) = 1$.

Si $A \neq 0$ (donc $\delta(A) \neq 0$) on note $\widehat{A}$ le polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$ défini par $A = \delta(A)\,\widehat{A}$.

1. Montrer que si A et B sont primitifs, il en est de même du produit AB.
2. Vérifier que $\delta(mC) = m\,\delta(C)$ pour tout (m, C) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}[X]$.
   Montrer que dans le cas général, on a $\delta(AB) = \delta(A)\delta(B)$.
3. Soient P, Q deux polynômes unitaires dans $\mathbb{Q}[X]$.
   On suppose que PQ est dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que P et Q sont dans $\mathbb{Z}[X]$.
4. On se donne deux éléments A, B de $\mathbb{Z}[X]$, le polynôme B étant unitaire.
   Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{C}[X]$.
   Montrer que le quotient Q et le reste R sont dans $\mathbb{Z}[X]$.