E pré-hilbertien de dim. finie et F sev de E. $\mathcal{B}$ est bon de E.

Adjoint

Théorème de Riesz: $\forall\varphi$ forme linéaire sur E
$\exists! a \in E$ tq $\varphi(x) = \langle a, x\rangle\ \forall x \in E$
Adjoint de u: u^* tq $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$, $\forall x, y \in E$
Propriétés :, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*, (u + \lambda v)^* = u^* + \overline{\lambda} v^*$
F u-stable $\Leftrightarrow F^\perp$ u^*-stable
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}, u^{**} = u, (u^k)^* = (u^*)^k$
u bijective $\Leftrightarrow u^*$ l'est, $(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$
$\text{Im}(u^*) = (\ker u)^\perp$, $\ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$

u **auto-adj** $\Leftrightarrow u^* = u \Leftrightarrow {}^t\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: u **symétrique** $\Leftrightarrow u^* = u \Leftrightarrow {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: u **hermitien** $\Leftrightarrow u^* = u \Leftrightarrow {}^t\overline{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$
Théorème spectral: Tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une bon
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ On dit orthogonalement diagonalisable
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ On dit unitairement diagonalisable

Endom. Orthogonales

u **Isométrie** $\|u(x)\| = \|x\|\ \forall x$
Auto. Orthogonale: isométrie et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Auto. Unitaire: isométrie et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Thm 2: u isométrie $\Leftrightarrow \|u(x)\| = \|x\|\ \forall x$
$u^* = u^{-1}$
$\Leftrightarrow \langle u(x), u(y), =\rangle\ \langle x, y\rangle\ \forall x, y$
$\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ bon $\forall \mathcal{B}$ bon

u, v isométries $\Rightarrow u \circ v^{-1}$ isométrie
$\text{Is}(E)$ est un sous groupe de GL(E)
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\text{Is}(E) = \text{U(E)}$ groupe unitaire
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\text{Is}(E) = \text{O(E)}$ groupe orthogonal
$u \in \text{Is}(E) \Rightarrow \det(u) = \pm 1$
$\text{Is}^+(E) = \{u \in \text{Is}(E),\ \det(u) = 1\}$ s.groupe de $\text{Is}(E)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\text{Is}^+(E) = \text{SU(E)}$ groupe unitaire spécial
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\text{Is}^+(E) = \text{SO(E)}$ groupe orthogonal spécial

Matrices Orthogonales

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale $\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice unitaire $\Leftrightarrow M^{-1} = {}^t\overline{M}$
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: O(n) groupe orthogonale
$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: U(n) groupe unitaire
$M \in \text{O}(n) \Rightarrow \det(u) = \pm 1$
$M \in \text{U}(n) \Rightarrow |\det(u)| = 1$
$\text{SO}^+(n) = \{M \in \text{O}(n),\ \det(M) = 1\}$
groupe orthogonal spécial
$\text{SU}^+(n) = \{M \in \text{U}(n),\ \det(M) = 1\}$
groupe unitaire spécial
$u \in \text{U(E)} \Leftrightarrow \text{M} \in \text{U(n)},\ \text{u} \in \text{SU(E)} \Leftrightarrow \text{M} \in \text{SU(n)}$
$u \in \text{O(E)} \Leftrightarrow \text{M} \in \text{O(n)},\ \text{u} \in \text{SO(E)} \Leftrightarrow \text{M} \in \text{SO(n)}$
$M \in \text{U(n)} \Leftrightarrow$ les colonnes (lignes) de M est bon de $\mathbb{C}^n$ pour $\langle X, Y\rangle = {}^t\overline{X}Y$
$M \in \text{O(n)} \Leftrightarrow$ les colonnes (lignes) de M est bon de $\mathbb{R}^n$ pour $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$
Toute matrice symétrique réelle M est orthogonalement diagonalisable
(i.e. $M = PDP^{-1}, P \in \text{O}(n)$)
Toute matrice hermitienne complexe M est unitairement diagonalisable
(i.e. $M = PDP^{-1}, P \in \text{U}(n)$)

Thèmes Classiques:
Matrices définies positives
Systèmes linéaires: LU, Cholesky,
Moindres carrés: