



My Ismail Mamouni

[http ://myismail.net](http://myismail.net)

مَمُونِي مُوَلَّي اسْمَاعِيل

EVN

Clés En Main

Topologie clés en main

	Méthode Topologique	Méthode séquentielle	Méthode Continue
A voisinage de x	$\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset A$		
$x \in A^\circ$	$\exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset A$		
A ouvert $A = A^\circ$	$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \subset A$		f continue et B ouvert alors $f^{-1}(B)$ ouvert
$x \in \text{ad}(A)$	$\forall \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$	$\exists x_n \in A$ tq $x = \lim x_n$	
A fermé $A = \text{ad}(A)$	A^c est ouvert $\forall x \in A^c, \exists \varepsilon > 0$ tq $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$	$\forall x_n \in A$ qui converge On a $\lim x_n \in A$	f continue et B fermée alors $f^{-1}(B)$ fermé
A Compact $A = \text{ad}(A)$	Fermé borné en dimension fini	$\forall x_n \in A$ $\exists x_{\varphi(n)}$ converge tq a $\lim x_{\varphi(n)} \in A$	
A dense dans B	$A \subset B \subset \text{ad}(A)$ ou bien $A \subset B$ et $\text{ad}(A) = B$	$\forall x \in B$ $\exists x_n \in A$ converge tq $\lim x_n = x$	
A complet		$\forall x_n \in A$ (x_n) de Cauchy $\Rightarrow (x_n)$ converge et $\lim x_n \in A$	

Continuité clés en main

Nature	Définition
Continuité globale Continuité en tout x	$(\forall x \in A), (\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) \text{ tq } (\forall y \in A)$ $\ x-y\ < \eta \Rightarrow \ f(x)-f(y)\ < \varepsilon \quad (\eta \text{ dépend de } x)$
Continuité uniforme	$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) \text{ tq } (\forall x \in A), (\forall y \in A)$ $\ x-y\ < \eta \Rightarrow \ f(x)-f(y)\ < \varepsilon \quad (\eta \text{ ne dépend pas de } x)$
k-lipschitzienne	$(\forall x \in A), (\forall y \in A) : \ f(x)-f(y)\ < k \cdot \ x-y\ $

	Caractérisation séquentielle	Caractérisation différentielle
Continuité globale	$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ ou bien $(x_n) \text{ cvge} \Rightarrow f(x_n) \text{ cvge}$	
Continuité uniforme	$x_n - y_n \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$ ou bien $(x_n) \text{ de Cauchy} \Rightarrow f(x_n) \text{ de Cauchy}$	
f k-lipschitzienne		f est de classe C^1 $\ f'\ _\infty \leq k$ ou $\ df\ _\infty \leq k$

Continuité des application linéaire clés en main

Théorème 1

En dimension finie, toute application linéaire est continue

Astuce MP

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire, pour montrer que f est continue

Méthode 1 : montrer que f continue en 0

Méthode 2 : montrer que f bornée au voisinage 0

Montrer que $\exists k > 0$ tq $\|f(x)\| \leq k \|x\|, \forall x \in E$

Théorème 2 :

En dimension finie, toute application linéaire est lipschitzienne

Théorème 3 : MP

Toute application linéaire continue est lipschitzienne

Classique Concours

Dans le cas $f : E \rightarrow F$ linéaire continue tq $\exists k > 0$ tq $\|f(x)\| \leq k \|x\|, \forall x \in E$

On pose $\|f\| = \sup \|f(x)\| / \|x\|$, on a

$$\|f\| \leq k$$

Pour montrer que $\|f\| = k$

Méthode 1 : On cherche $x_0 \in E$ tq $\|f(x_0)\| / \|x_0\| = k$

Méthode 2 : On cherche une suite $(x_n) \in E$ tq $\|f(x_n)\| / \|x_n\| \rightarrow k$

Continuité des application n-linéaire

clés en main

Théorème 1

En dimension finie, toute application n-linéaire est continue

Théorème 2

le déterminant est une application continue

Théorème 2

En dimension finie, toute application polynomiale est continue

Rappel

fct polynomiale = $\sum \prod$

$\prod$: n-linéaire et $\sum$ linéaire

Astuce MP

Soit $f : E^n \rightarrow F$ n-linéaire, pour montrer que f est continue

Il suffit de montrer que $\exists k > 0$ tq $\|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq k \|x_1\| \dots \|x_n\|, \forall x_k \in E$

Astuce MP

Soit $f : E^2 \rightarrow F$ bi-linéaire, pour montrer que f est continue

Il suffit de montrer que $\exists k > 0$ tq $\|f(x_1, x_2)\| \leq k \|x_1\| \cdot \|x_2\|, \forall x \in x_k E$

Théorème 3

Dans un préhilbertien le produit scalaire est une application continue

Demo

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Théorème 4

1. Dans une algèbre normée le produit est continue
2. En particulier, le produit de matrices est continue

Demo

1. $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
2. Prendre la norme $\| \cdot \|$, elle vérifie $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Topologie Matricielle clés en main

Notion	Exemples à connaître
Ouverts	$GL_n(\mathbb{R})$ $D_n^{++}(\mathbb{R}) = \{\text{matrices diagonalisable à valeurs propres simples}\}$ $S_n^{++}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tX.A.X > 0\}, \forall X \neq 0$
Fermés	Tout sev de $M_n(\mathbb{R})$ En particulier $S_n(\mathbb{R}), A_n(\mathbb{R}), T_n(\mathbb{R}), D_n(\mathbb{R})$ $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tX.A.X \geq 0\}, \forall X \neq 0$
Compact	$O_n(\mathbb{R})$
Denses	$\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ $GL_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{R})$ $D_n^{++}(\mathbb{R})$ dense dans $T_n(\mathbb{R})$ $D_n^+(\mathbb{R}) = \{\text{matrices diagonalisables}\}$ dense dans $T_n(\mathbb{R})$ $D_n^{++}(\mathbb{C})$ et $D_n^+(\mathbb{C})$ denses dans $M_n(\mathbb{C})$ $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $S_n^+(\mathbb{R})$

Topologie Vectorielle clés en main

Notion	Exemples à connaître
Fermés	Tout sev de dimension est fermé $H = \ker \varphi$ hyperplan est fermé $\Leftrightarrow \varphi$ continue
Complet	Tout sev de dimension est fermé
Intérieur vide	Tout sev stricte est d'intérieur vide