

Préparation aux Concours

Théorèmes Taubériens

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

I Approximation

I.A – Quelques calculs préliminaires

Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

I.A.1) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

I.A.2) Montrer que $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.

I.A.3) Montrer que $\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

I.A.4) Dédurre des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}.$$

I.B – Étude de $S(x)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

I.B.1) Majoration de $S(x)$: première méthode

On note

- V l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,
- W l'ensemble des entiers $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$,

et on pose

$$S_V(x) = \sum_{k \in V} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et} \quad S_W(x) = \sum_{k \in W} \left|x - \frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

a) Montrer que $S_V(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

b) Montrer que $S_W(x) \leq \frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire que $S(x) \leq \frac{5}{4\sqrt{n}}$.

I.B.2) Majoration de $S(x)$: seconde méthode

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la **question I.A.4**, en déduire que $S(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

I.C – Application à l'approximation uniforme

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\| \cdot \|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième polynôme de Bernstein de f , noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0, 1]$

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

I.C.1) Un exemple

Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

I.C.2) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x \in [0, 1]$, la relation

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

I.C.3) a) Montrer que si f est δ -lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geq 1$.

b) En déduire que si f est de classe C^1 , alors il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{n}}$.

c) Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe C^1 par morceaux.

I.C.4) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) - r \leq P(x) \leq f(x) + r$.

II Un théorème de Hardy-Littlewood

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R_a = 1$ et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie

$$f(x) \sim \frac{1}{1-x} \quad \text{quand } x \rightarrow 1, \ x < 1. \quad (\text{II.1})$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\tilde{a}_n$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \dots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (\text{II.2})$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = 1 \quad (\text{II.3})$$

II.A – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.2

II.A.1) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

II.A.2) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant **II.1** mais ne convergeant pas vers 1.

II.B – L'hypothèse II.1 n'entraîne pas la propriété II.3

II.B.1) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

II.B.2) On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \frac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera en fonction de n , suivant la parité de n , les réels u_n et v_n .

II.B.3) Calculer $\tilde{v}_n$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \dots, v_n$).

II.B.4) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifiant **II.1** mais ne vérifiant pas la **propriété II.3**.

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer **II.1** et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$, est de démontrer la **propriété II.3** (théorème de Hardy et Littlewood).

II.C – Majoration de la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$

II.C.1) Pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geq A_n x^n$.

II.C.2) Montrer l'existence d'un entier $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, f(e^{-1/n}) \leq \frac{2}{1 - e^{-1/n}}.$$

II.C.3) En déduire que la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$ est majorée.

II.D – Minoration, à partir d'un certain rang, de $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0}$ par un réel > 0

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\tilde{a}_n)_{n \geq 0} : \forall n \in \mathbb{N}, \tilde{a}_n \leq \mu$.

II.D.1) a) Pour tout $x \in]-1, 1[$, montrer que $(1-x) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f(x)}{1-x} \leq A_{N-1} \frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

c) En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leq A_{N-1} + \mu \left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} \right).$$

II.D.2) Soit λ un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geq N_0$,

$$f(e^{-\lambda/N}) \geq \frac{1}{2(1 - e^{-\lambda/N})} \geq \frac{N}{2\lambda}.$$

b) Montrer que pour tout $N \geq N_0$

$$\tilde{a}_{N-1} \geq \frac{1}{2\lambda} - \mu e^{-\lambda} \left(1 + \frac{1}{N} + e^{-\lambda/N} \frac{1}{N(1 - e^{-\lambda/N})} \right).$$

c) Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

d) Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

II.D.3) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang on ait $\tilde{a}_n \geq \nu$.

II.E – Démonstration de la propriété II.3, due à Karamata

Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = 1/x$ si $x \geq e^{-1}$ et $g(x) = 0$ sinon.

On fixe un réel $\varepsilon \in]0, e^{-1}[$. On définit deux applications continues $g^+, g^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi :

- g^+ est affine sur $[e^{-1} - \varepsilon, e^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1} - \varepsilon] \cup [e^{-1}, 1]$;
- g^- est affine sur $[e^{-1}, e^{-1} + \varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, e^{-1}[\cup [e^{-1} + \varepsilon, 1]$.

Pour tout entier $N > 0$ on pose $x_N = e^{-1/N}$.

On rappelle que dans cette sous-partie, on fait les hypothèses **II.1** et **II.4**

II.E.1) Calculer $\int_0^1 g^+(t) dt$ et $\int_0^1 g^-(t) dt$.

II.E.2) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \xrightarrow[x < 1]{x \rightarrow 1} \int_0^1 P(t) dt.$$

On considérera d'abord le cas particulier $P(x) = x^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

II.E.3) Établir l'existence de deux polynômes P, Q à coefficients réels tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g^-(x) - \varepsilon \leq P(x) \leq g(x) \leq Q(x) \leq g^+(x) + \varepsilon.$$

II.E.4) Établir l'existence d'un entier $N_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geq N_1$,

$$(1 - x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geq \int_0^1 P(t) dt - \varepsilon$$

et

$$(1 - x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leq \int_0^1 Q(t) dt + \varepsilon.$$

II.E.5) Dédurre des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geq N_1$

$$1 - 5\varepsilon \leq (1 - x_N) A_N \leq 1 + 5\varepsilon.$$

II.E.6) Conclure.

• • • FIN • • •
