

Préparation aux Concours

Théorèmes Taubériens

Table des matières

1 - Autour du théorème de Cesàro	2
1.1 - Le théorème de Cesàro	2
1.2 - Réciproques partielles du théorème de Cesàro	3
1.3 - Applications	6
1.4 - Versions continues	7
1.4.1 - Version continue numéro 1	7
1.4.2 - Version continue numéro 2	8
2 - Autour du théorème d'Abel	9
2.1 - Le théorème d'Abel	9
2.2 - Réciproques partielles du théorème d'Abel	10
2.3 - Version continue	14
2.4 - Réciproque totale du théorème d'Abel	16

Dans ce cours, on démontre les théorèmes de Cesàro et d'Abel sous toutes leurs formes.

1 Autour du théorème de Cesàro

1.1 Le théorème de Cesàro

Théorème 1 : Théorème de Cesàro

Soient (u_n) une suite réelle et posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Si (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors (v_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Trois cas s'offrent à nous.

• Cas où $\ell \in \mathbb{R}$:

Soit $\epsilon > 0$. Comme (u_n) converge vers ℓ ,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon. \quad (\star)$$

Soit $n \geq N_0$. Nous avons

$$|v_n - \ell| = \left| \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^n u_k - \ell \right| = \frac{1}{n+1} \times \left| \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right|.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=N_0}^n |u_k - \ell|.$$

En combinant ce qui précède à $(\star)$, on obtient

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=N_0}^n \epsilon \leq \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| + \frac{n - N_0 + 1}{n+1} \times \epsilon.$$

Puis comme $\frac{n - N_0 + 1}{n+1} \leq 1$, on a alors établi

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| + \epsilon. \quad (\star\star)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| = 0$ donc

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^{N_0-1} |u_k - \ell| \leq \epsilon.$$

On pose $N = \max(N_0, N_1)$. En combinant ce dernier résultat à $(\star\star)$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - \ell| \leq 2\epsilon.$$

On a donc démontré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - \ell| \leq 2\epsilon.$$

Cela permet d'affirmer que (v_n) converge vers ℓ .

• *Cas où $\ell = +\infty$:*

Soit $A \in \mathbb{R}^+$. Comme (u_n) tend vers $+\infty$,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow u_n \geq 4A.$$

Si $n \geq N_0$ alors

$$v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{N_0-1}}{n+1} + \frac{u_{N_0} + \dots + u_n}{n+1} \geq \frac{u_0 + \dots + u_{N_0-1}}{n+1} + 4A \times \left(\frac{n - N_0 + 1}{n+1} \right). \quad (\star)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - N_0 + 1}{n+1} = 1$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow \frac{n - N_0 + 1}{n+1} \geq \frac{1}{2}. \quad (\star\star)$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0 + \dots + u_{N_0-1}}{n+1} = 0$ alors

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 \Rightarrow \frac{u_0 + \dots + u_{N_0-1}}{n+1} \geq -A. \quad (\star\star\star)$$

On pose alors $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. En combinant $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow v_n \geq A.$$

On a donc prouvé que

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq A.$$

Cela permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

• *Cas où $\ell = -\infty$:*

La suite $-u$ tend vers $+\infty$. Par le cas précédent, on en déduit que la suite $-v$ tend vers $+\infty$ (puisque la moyenne des opposés est égale à l'opposé de la moyenne). Par conséquent, v tend vers $-\infty$. ☺

Remarque I

Ce théorème se généralise sans difficulté au cas d'une suite complexe.

1.2 Réciproques partielles du théorème de Cesàro

La réciproque du théorème de Cesàro est fausse.

En effet, considérons la suite u défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite (v_n) converge vers 0. En revanche, la suite u est une suite divergente de seconde espèce et la réciproque du théorème de Cesàro est bien fausse.

Mais, on peut tout de même établir une réciproque partielle au théorème de Cesàro en ajoutant une hypothèse supplémentaire. Trois versions sont proposées.

Théorème 2

Soient (u_n) une suite réelle et posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Si (v_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et si (u_n) est monotone alors (u_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Comme u est monotone, par le théorème de la limite monotone, la suite u admet une limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Par le théorème de Cesàro, on en déduit que u et v tendent vers la même limite et alors $\ell = \ell'$. Par conséquent, u tend vers ℓ . ☺

Théorème 3 : Théorème de Hardy, version faible

Soient (u_n) une suite réelle et posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Si (v_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et si $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors (u_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Par une transformation d'Abel, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k(u_{k+1} - u_k)) &= \sum_{k=0}^n k u_{k+1} - \sum_{k=0}^n k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k - \sum_{k=1}^n k u_k \\ &= - \sum_{k=1}^n u_k + n u_n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^n (k(u_{k+1} - u_k)) - \frac{u_0}{n} + \frac{n+1}{n} \times v_n. \quad (\star)$$

Or, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 0$ donc, par le théorème de Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^n (k(u_{k+1} - u_k)) = 0.$$

En passant à la limite dans $(\star)$, nous obtenons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. ☺

Théorème 4 : Théorème de Hardy, version forte

Soient (u_n) une suite réelle et posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

Si (v_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si $u_{n+1} - u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors (u_n) tend vers ℓ .

Démonstration. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = u_{n+1} - u_n$.
Soient $0 \leq n < m$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} + \cdots + u_m}{m-n} - u_n &= \frac{1}{m-n} \times \sum_{i=n+1}^m (u_i - u_n) \\ &= \frac{1}{m-n} \times \sum_{i=n+1}^m \left(\sum_{j=n}^{i-1} (u_{j+1} - u_j) \right) \\ &= \frac{1}{m-n} \times \sum_{j=n}^{m-1} \left(\sum_{i=j+1}^m x_i \right) = \sum_{j=n}^{m-1} \frac{m-j}{m-n} \times x_j. \end{aligned}$$

En exploitant que $x_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$, on obtient l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$\forall n < m, \left| \frac{u_{n+1} + \cdots + u_m}{m-n} - u_n \right| \leq K \times \sum_{j=n}^{m-1} \frac{m-j}{m-n} \times \frac{1}{j} \leq K \times \sum_{j=n+1}^{m-1} \frac{1}{j}.$$

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir que

$$\forall j \geq 2, \frac{1}{j} \leq \ln(j) - \ln(j-1).$$

Ainsi,

$$\forall n < m, \left| \frac{u_{n+1} + \cdots + u_m}{m-n} - u_n \right| \leq K \times \sum_{j=n+1}^{m-1} (\ln(j) - \ln(j-1))$$

Puis, par télescopage,

$$\forall n < m, \left| \frac{u_{n+1} + \cdots + u_m}{m-n} - u_n \right| \leq K \times \ln \left(\frac{m-1}{n} \right).$$

Par ailleurs, comme $\frac{u_{n+1} + \cdots + u_m}{m-n} = \frac{v_m - \frac{n+1}{m+1} v_n}{1 - \frac{n+1}{m+1}}$, nous obtenons

$$\forall n < m, \left| \frac{v_m - \frac{n+1}{m+1} v_n}{1 - \frac{n+1}{m+1}} - u_n \right| \leq K \times \ln \left(\frac{m-1}{n} \right). \quad (\star)$$

Par l'inégalité triangulaire, pour tous $n < m$,

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &\leq \left| \frac{v_m - \frac{n+1}{m+1} v_n}{1 - \frac{n+1}{m+1}} - u_n \right| + \left| \frac{v_m - \frac{n+1}{m+1} v_n}{1 - \frac{n+1}{m+1}} - \ell \right| \\ &\leq K \times \ln \left(\frac{m-1}{n} \right) + \frac{1}{1 - \frac{n+1}{m+1}} \times \left(|v_m - \ell| + \frac{n+1}{m+1} \times |v_n - \ell| \right) \\ &\leq K \times \ln \left(\frac{m-1}{n} \right) + \frac{m+1}{m-n} \times |v_m - \ell| + \frac{n+1}{m-n} \times |v_n - \ell|. \\ &\leq K \times \ln \left(\frac{m-1}{n} \right) + \frac{m+1}{m-n} \times (|v_m - \ell| + |v_n - \ell|). \end{aligned}$$

Soit $\Lambda > 1$. Choisissons $m = 1 + \lfloor \Lambda n \rfloor$. Alors $\frac{m-1}{n} \leq \Lambda$ et $\frac{m+1}{m-n} \leq \frac{\Lambda}{\Lambda-1}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \Lambda > 1, |u_n - \ell| \leq K \ln(\Lambda) + \frac{\Lambda+2}{\Lambda-1} \times (|v_{1+\lfloor \Lambda n \rfloor} - \ell| + |v_n - \ell|).$$

Soit $\epsilon > 0$.

Comme $\lim_{\Lambda \rightarrow 1} K \ln(\Lambda) = 0$ alors, il existe $\Lambda > 1$ tel que $K \ln(\Lambda) \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m+1}{m-n} \times (|v_m - \ell| + |v_n - \ell|) = 0$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \frac{m+1}{m-n} \times (|v_m - \ell| + |v_n - \ell|) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a donc prouvé que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Le suite (u_n) converge donc vers ℓ . ☺

Remarque II

Le théorème précédent reste valide si $\ell = \pm\infty$.

1.3 Applications

Exemple 1 : Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \neq 0$. Donnons un équivalent simple de u_n .

D'après le théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

Par télescopage, cela signifie que

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_0}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

Ainsi,

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \underbrace{\frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_0}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha} + \underbrace{\frac{u_0}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha.$$

Puis $\frac{u_{n+1}}{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \alpha$. Ainsi, $\boxed{u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \alpha n}$.

Exemple 2 : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in]0, +\infty[.$$

Montrons que

$$\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \ell.$$

L'hypothèse permet d'affirmer que

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell).$$

En utilisant le théorème de Cesàro, nous obtenons

$$\frac{1}{n+1} \times \sum_{k=0}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell).$$

Par télescopage, cela signifie que

$$\frac{\ln(u_{n+1})}{n+1} - \frac{\ln(u_0)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell).$$

Ainsi,

$$\frac{\ln(u_{n+1})}{n+1} = \underbrace{\frac{\ln(u_{n+1})}{n+1} - \frac{\ln(u_0)}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)} + \underbrace{\frac{\ln(u_0)}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell).$$

Ainsi, $\frac{\ln(u_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$ puis, en composant par la fonction exp, nous obtenons $\boxed{\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell}.$

1.4 Versions continues

1.4.1 Version continue numéro 1

Théorème 5 : Cesàro, version continue 1

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$.

Démonstration. Traitons le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, les cas où $\ell = \pm\infty$ n'étant pas bien difficile.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ alors

$$\exists A \geq 0 / \forall t \geq 0, t \geq A \Rightarrow |f(t) - \ell| \leq \epsilon.$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire, si $x \geq A$ alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x \epsilon dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \epsilon. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt = 0$ alors

$$\exists B \geq 0 / \forall x \geq 0, x \geq B \Rightarrow \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt \leq \epsilon.$$

On pose $C = \max(A, B)$ pour obtenir que

$$\forall x \geq 0, x \geq C \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \ell \right| \leq 2\epsilon.$$

Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$. 

Remarque III

La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction cos. En revanche, elle devient vraie sous l'hypothèse f monotone à l'aide du théorème de la limite monotone.

1.4.2 Version continue numéro 2

Théorème 6 : Cesàro, version continue 2

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = \ell$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut se ramener au cas où $\ell = 0$ en posant $\tilde{f}(x) = f(x) - \ell x$. Si $x \geq 2$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x - [x])}{x} + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{[x]-1} \epsilon(x - [x] + k)$$

où $\epsilon(x) = f(x+1) - f(x)$. ϵ étant continue et tendant vers 0 en $+\infty$, on peut poser $A_k = \sup_{[k, k+1]} |\epsilon|$ et affirmer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = 0$.

On a $\left| \frac{f(x - [x])}{x} \right| \leq \frac{\max_{[0,1]} |f|}{x}$ donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x - [x])}{x} = 0$.

D'autre part,

$$\left| \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{[x]-1} \epsilon(x - [x] + k) \right| \leq \frac{1}{[x] - 1} \sum_{k=0}^{[x]-1} A_k$$

et, comme d'après le théorème Cesàro,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A_k = 0,$$

on obtient par composition et encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{[x]-1} \epsilon(x - [x] + k) = 0.$$

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. ☺

Remarque IV

La réciproque de cette version continue est fautive comme le montre l'exemple de la fonction cos.

Exemple 3 : La fonction $\ln$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\ln(1+x) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Le théorème précédent s'applique (le fait que $\ln$ ne soit pas défini en 0 ne pose aucun problème puisque l'étude a lieu en $+\infty$).

On retrouve ainsi le résultat de croissance comparée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

2 Autour du théorème d'Abel

2.1 Le théorème d'Abel

Théorème 7 : Théorème d'Abel

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Si la série $\sum a_n$ converge alors f possède une limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. Par le théorème d'interversion limite et somme, pour établir le résultat il suffit de prouver que la série de fonction $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1[$. Soient $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \text{ et } R_n = R_n(1).$$

Par une transformation d'Abel, nous obtenons

$$R_n(x) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k \right) \times (1-x) - R_n x^{n+1}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme (R_n) converge vers 0 alors

$$\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |R_n| \leq \epsilon.$$

Par conséquent, si $n \geq N$ alors

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |R_k| x^k \times (1-x) + |R_n| x^{n+1} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \epsilon x^k \times (1-x) + \epsilon x^{n+1} \\ &\leq \epsilon \times x^{n+1} + \epsilon \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, n \geq N \Rightarrow |R_n(x)| \leq \epsilon.$$

Cela signifie bien que la série de fonctions $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, 1[$. 

Remarque V

Ce théorème se généralise bien évidemment dans le cas d'un rayon de convergence différent de 1. Dans le théorème nous avons montré que la série entière $\sum a_n x^n$ convergeait uniformément sur $[0, 1[$. On peut, en réalité, montrer la convergence uniforme de $\sum a_n z^n$ sur

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \varphi \in [-\theta_0, \theta_0] / z = 1 - \rho e^{i\varphi}\}$$

pour tout $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

2.2 Réciproques partielles du théorème d'Abel

La réciproque du théorème d'Abel est fausse.
En effet, considérons la suite u défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = (-1)^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ possède bien un rayon de convergence égal à 1 et, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Ainsi, f possède bien une limite en 1^- . En revanche, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement puisque son terme général ne converge pas vers 0. La réciproque du théorème d'Abel est bien fausse. Mais, on peut tout de même établir une réciproque partielle au théorème d'Abel en ajoutant une hypothèse supplémentaire. Trois versions sont proposées.

Théorème 8

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Si f possède une limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ et si la suite (a_n) est positive alors la série $\sum a_n$ converge et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. Soit $x \in [0, 1]$. Comme la suite (a_k) est positive, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq f(x).$$

En faisant tendre x vers 1^- , il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Par conséquent, la suite des sommes partielles associées à la série de terme général a_k est majorée : c'est donc une série convergente puisque à termes positifs. De plus, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

Par ailleurs, pour tout $0 \leq x \leq 1$.

$$f(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

En faisant tendre x vers 1, nous aboutissons à

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

Par double inégalité, le résultat est établi. 

Théorème 9 : Théorème Taubérien, version faible

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Si f possède une limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ et si $a_n = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$ alors la série $\sum a_n$ converge et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1[$.

Posons $M_n = \sup_{k \geq n} |k|a_k|$. Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$.

Par ailleurs,

$$\forall k \in \mathbb{N}, 1 - x^k = (1 - x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x). \quad (\star)$$

De plus, en utilisant $(\star)$ et la définition de M_n , nous avons

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| x^k + \sum_{k=0}^n |a_k| (1 - x^k) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k| \frac{x^k}{k} + \left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times (1 - x) \\ &\leq M_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} + \left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times (1 - x) \\ &\leq \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k + \left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times (1 - x) \\ &\leq \frac{M_n}{n(1-x)} + \left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times (1 - x). \end{aligned}$$

Choisissons $x = x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Alors $\frac{M_n}{n(1-x)} = M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus, par le théorème de Césàro,

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times (1 - x_n) = \left(\sum_{k=0}^n |a_k| k \right) \times \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On a donc prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) - \sum_{k=0}^n a_k = 0.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - f(x_n) + f(x_n) - \sum_{k=0}^n a_k.$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, la suite $\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \right)$ converge vers 0.

On en déduit que la série $\sum a_n$ converge et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. 

Théorème 10 : Théorème Taubérien, version forte

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Si f possède une limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ et si $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum a_n$ converge et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration. Quitte à remplacer a_0 par $a_0 - \lim_{1^-} f$, on peut supposer que $\lim_{1^-} f = 0$.

On introduit le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, Θ défini par

$$\theta = \left\{ \theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / \forall x \in [0, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) \text{ converge et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = 0 \right\}.$$

Étape N° 1 : Montrons que pour établir le théorème, il suffit de prouver que $g = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1]} \in \Theta$.

Remarquons que l'on a $x^n < \frac{1}{2}$ dès que $n > -\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$. Dès lors, si l'on pose $N_x = \left\lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(x)} \right\rfloor$ alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n=0}^{N_x} a_n.$$

Supposons avoir montré $g \in \Theta$. Alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{N_x} a_n = 0$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et posons $x_p = \exp\left(-\frac{\ln(2)}{p}\right)$. Notons que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = 1$. Alors, par caractérisation séquentielle de la limite, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^p a_n = \sum_{n=0}^{N_{x_p}} a_n \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, la série $\sum a_n$ converge vers 0.

Étape N° 2 : Montrons que $X\mathbb{R}[X] \subset \Theta$.

Pour montrer ce résultat, il suffit de vérifier que chaque monôme X^k , pour $k \in \mathbb{N}^*$ est dans Θ , puisque Θ est stable par combinaison linéaire.

La série entière $\sum a_n x^{kn}$ converge pour $0 \leq x < 1$ puisque $0 \leq x^k < 1$ et que $\sum a_n x^n$ converge. De plus, par composition de limite, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{kn} = 0$ puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^n = 0$.

Étape N° 3 : Montrons que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], (1-x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^1 P(t) dt.$$

Par linéarité, il suffit d'établir le résultat lorsque P est un monôme.

Si $P = X^k$ alors

$$\begin{aligned} (1-x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) &= (1-x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^{1+k}\right)^n \\ &= (1-x) \times \frac{1}{1-x^{1+k}} \\ &= \frac{1}{1+x+\dots+x^k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+k} = \int_0^1 P(t) dt. \end{aligned}$$

Étape N° 4 : Approximation par des polynômes.

Considérer la fonction $h(x) = \frac{g(x)-x}{x(1-x)}$. Alors $h(x) = \frac{1}{x-1}$ si $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Soit $\epsilon > 0$. On approche h par deux fonctions continues s_1 et s_2 vérifiant $s_1 \leq h \leq s_2$ et $\int_0^1 s_2 - s_1 \leq \epsilon$. Puis d'après le théorème de Weierstrass, il existe deux polynômes T_1 et T_2 tels que $|T_1 - s_1| \leq \epsilon$ et $|T_2 - s_2| \leq \epsilon$.

On pose enfin $U_1 = T_1 - \epsilon$ et $U_2 = T_2 + \epsilon$.

Ainsi nous avons $U_1 \leq h \leq U_2$ et $\int_0^1 U_2 - U_1 \leq 5\epsilon$.

Compte tenu de ce qui vient d'être fait, on pose $P_1(x) = x + x(1-x)U_1(x)$, $P_2(x) = x + x(1-x)U_2(x)$ et $Q(x) = \frac{P_2(x)-P_1(x)}{x(1-x)}$.

Les polynômes P_1 et P_2 vérifient

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, \quad P_1 \leq g \leq P_2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_0^1 Q \leq 5\epsilon.$$

Étape N° 5 : Preuve du théorème.

Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \frac{M}{n}$. En utilisant l'étape N° 4, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| |g - P_1|(x^n) \\ &\leq M \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} |P_2 - P_1|(x^n) \\ &\leq M \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n (1 - x^n) Q(x^n). \end{aligned}$$

Or $1 - x^n \leq n(1 - x)$ donc

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| \leq M(1 - x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n).$$

Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| + M(1 - x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n).$$

D'après l'étape N° 3, $\lim_{x \rightarrow 1^-} M(1 - x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) = M \int_0^1 Q(t) dt$.

Or $0 \leq M \int_0^1 Q(t) \leq 5M\epsilon$, donc, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in [1 - \delta_1, 1[, \quad M(1 - x) \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) \leq 10M\epsilon.$$

De plus, $P_1 \in X\mathbb{R}[X]$. Ainsi, d'après l'étape N° 2, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) = 0$. Donc, il existe $\delta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in [1 - \delta_2, 1[, \quad \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| \leq \epsilon.$$

On pose $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in [1 - \delta, 1[, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \right| \leq (1 + 5M)\epsilon.$$

Ainsi $g \in \Theta$ et le théorème est donc démontré. 

2.3 Version continue

Définition A : Transformée de Laplace

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$. On appelle transformée de Laplace de f l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) : [0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque VI

Soit $t > 0$. $g : x \mapsto e^{-tx} f(x)$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ vérifiant $g(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$. Par conséquent, g est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis la quantité $\mathcal{L}(f)(t)$ est bien définie. On en déduit que l'application $\mathcal{L}(f)$ est correctement définie.

Théorème 11 : Abel, version continue

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$.
Si $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge alors $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Démonstration. Considérons $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$. La fonction F vérifie

$$\forall x \in [0, +\infty[, F(x) = - \int_0^x f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $F' = -f$.

Soit $A > 0$. Les fonctions $u : x \mapsto -F(x)$ et $v : x \mapsto e^{-tx}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$ donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-tx} f(x) dx &= \left[-e^{-tx} F(x) \right]_{x=0}^{x=A} - t \int_0^A e^{-tx} F(x) dx \\ &= F(0) - e^{-tA} F(A) - t \int_0^A e^{-tx} F(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction F est continue et admet une limite en $+\infty$ (donc est bornée) sur $[0, +\infty[$ ainsi, il est possible de passer à la limite quand A tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx - t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ alors

$$\exists B > 0 / \forall x \in [0, +\infty[, x \geq B \Rightarrow |F(x)| \leq \epsilon.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \right| &\leq t \int_0^B e^{-tx} |F(x)| dx + t \int_B^{+\infty} e^{-tx} |F(x)| dx \\ &\leq tB \|F\|_\infty + \epsilon e^{-Bt} \\ &\leq tB \|F\|_\infty + \epsilon. \end{aligned}$$

Or $\lim_{t \rightarrow 0} tB \|F\|_\infty = 0$ alors

$$\exists \delta > 0 / \forall t > 0, 0 < t \leq \delta \Rightarrow tB \|F\|_\infty \leq \epsilon.$$

On a donc montré que

$$\exists \delta > 0 / \forall t > 0, 0 < t \leq \delta \Rightarrow \left| t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx \right| \leq 2\epsilon.$$

On peut donc affirmer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \int_0^{+\infty} e^{-tx} F(x) dx = 0$. Par encadrement, on a donc établi que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$. ☺

Exemple 4 : Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

À l'aide d'un prolongement par continuité en 0 et d'une intégration par parties, on démontré aisément que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ converge.

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et y est bornée.

Le théorème précédent permet d'affirmer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale permet de montrer que $\mathcal{L}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f)'(t) &= - \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-xt} dx \\ &= - \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-t+i)x} dx \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{-t+i} \right) = - \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(f)(t) = -\arctan(t) + C$.

Le théorème d'interversion limite et intégrale permet de montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(t) = 0$.

Par conséquent, $C = \frac{\pi}{2}$ et, pour tout $t > 0$, $\mathcal{L}(f)(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) = \arctan\left(\frac{1}{t}\right)$.

On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Remarque VII

La réciproque de cette version continue est fausse comme le montre l'exemple de la fonction sin. En revanche, elle devient vrai sous l'hypothèse $f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$ comme c'était le cas pour le théorème Taubérien.

2.4 Réciproque totale du théorème d'Abel

Théorème 12

Soit $f : x \mapsto \sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

La série $\sum a_n$ converge si, et seulement si,

f possède une limite finie lorsque $x \rightarrow 1^-$ et $\sum_{k=0}^n ka_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{\circ}(n)$.

Dans ce cas, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. " $\Rightarrow$ " : Le théorème d'Abel permet d'affirmer que f possède une limite en 1^- .
Notons R_n le reste d'ordre n associée à la série $\sum a_n$. Par une transformation d'Abel, nous obtenons

$$\frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^n ka_k = R_n + \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} R_k.$$

Le théorème de Cesàro permet de conclure que $\sum_{k=0}^n ka_k = \underset{n \rightarrow +\infty}{\circ}(n)$.

" $\Leftarrow$ " : Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $A_n = \sum_{k=0}^n ka_k$. Par une transformation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \sum_{k=1}^n ka_k \times \frac{1}{k} = a_0 + \frac{A_n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k(k+1)}.$$

Par le théorème de Cesàro, $\left(\frac{A_n}{n}\right)$ converge vers 0. Par conséquent, la série $\sum a_k$ converge si, et seulement si, la série $\sum \frac{A_k}{k(k+1)}$ converge.

Soit $x \in [0, 1[$. Par une transformation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^n a_k x^k = a_0 + \sum_{k=1}^n ka_k \times \frac{x^k}{k} = a_0 + \frac{A_n x^n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k(k+1)} x^k + (1-x) \times \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k+1} x^k.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons

$$f(x) = a_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k}{k(k+1)} x^k + (1-x) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k}{k+1} x^k.$$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A_k}{k} = 0$, on montre que la fonction $x \mapsto (1-x) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A_k}{k+1} x^k$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1^- . Comme f possède une limite en 1^- , on en déduit que la série entière $\sum \frac{A_k}{k(k+1)} x^k$ possède une limite en 1^- . Mais $\frac{A_k}{k(k+1)} \underset{k \rightarrow +\infty}{\circ} \left(\frac{1}{k}\right)$ et le théorème de Hardy (faible) permet d'en déduire que $\sum \frac{A_k}{k(k+1)}$ converge. ☺

Remarque VIII

Le théorème analogue pour la version continue est valide.