ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS 2003 FILIÈRE **MP** - OPTION SCIENCES INDUSTRIELLES
FILIÈRE **PC**

ÉPREUVE FACULTATIVE D'INFORMATIQUE

(Durée : 2 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas autorisée** pour cette épreuve.
Le langage de programmation choisi par le candidat doit être spécifié en tête de la copie.

⋆⋆⋆

Avertissement On attachera une grande importance à la clarté, à la précision, à la concision de la rédaction.

L'enclos du robot

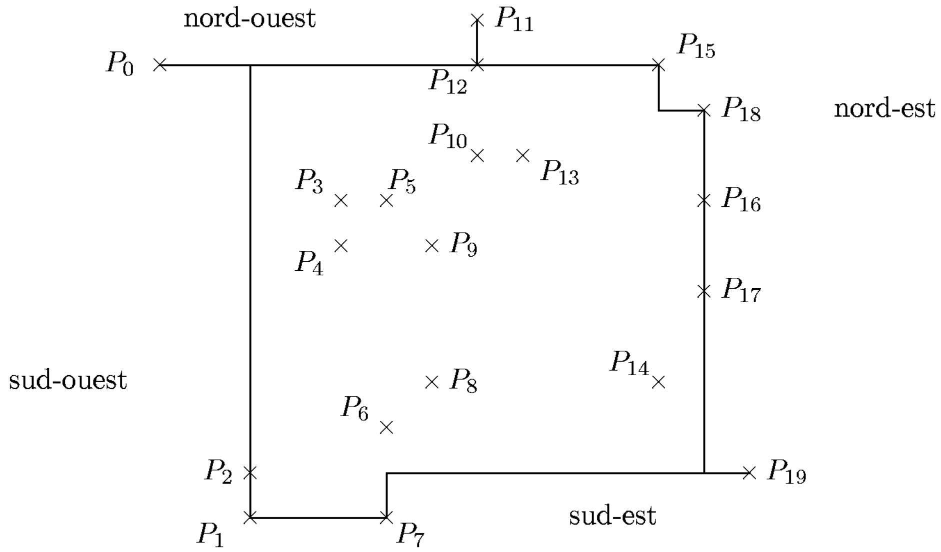
Frontière Sud-Ouest

Un robot rend visite à n points P_i $(0 \leq i < n)$ de coordonnées (a_i, b_i) $(a_i \in \mathbf{N}, b_i \in \mathbf{N}, n \geq 0)$. Le robot ne fait que des déplacements parallèles à l'axe des abscisses ou à l'axe des ordonnées. Ses déplacements sont toujours de longueur minimale entre deux points. Toutefois le robot n'est pas très fiable. On veut délimiter l'espace minimal nécessaire pour ses déplacements en tendant une ficelle autour du périmètre strictement nécessaire pour les déplacements du robot.

L'*intérieur Manhattan* des n points est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\exists i.\ 0 \leq i < n \text{ et } a_i \leq x \text{ et } b_i \leq y & \text{(sud-ouest)} \\
\exists i.\ 0 \leq i < n \text{ et } a_i \geq x \text{ et } b_i \leq y & \text{(sud-est)} \\
\exists i.\ 0 \leq i < n \text{ et } a_i \geq x \text{ et } b_i \geq y & \text{(nord-est)} \\
\exists i.\ 0 \leq i < n \text{ et } a_i \leq x \text{ et } b_i \geq y & \text{(nord-ouest)}
\end{array}$$

L'enveloppe Manhattan est un polygone dont l'intérieur est l'intérieur Manhattan de ces n points. Par exemple sur les 20 points de la figure suivante, c'est le polygone suivant :



On se propose de calculer les points définissant l'enveloppe Manhattan dans un premier temps, puis de tracer cette enveloppe dans un deuxième temps.

Question 1 Écrire la fonction *sudouest* qui retourne le résultat vrai si et seulement si le point de coordonnées (x_1, y_1) est au sudouest du point de coordonnée (x_2, y_2), c'est-à-dire si $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$. Écrire de même les fonctions *nordouest*, *sudest*, *nordest*. (Dans les langages de programmation où les valeurs booléennes n'existent pas, on rendra l'entier 0 pour la valeur *faux* et 1 pour la valeur *vrai*)

Nous décomposons le calcul de l'enveloppe en quatre fonctions : la première calcule les points définissant la partie sud-ouest de l'enveloppe, la deuxième calcule les points définissant la partie nord-ouest, la troisième et quatrième font de même sur les parties sud-est et nord-est.

On suppose les coordonnées des n points P_i rangés dans deux tableaux a et b d'entiers contenant l'abscisse a_i et l'ordonnée b_i du point P_i pour tout i $(0 \leq i < n)$. En outre, on suppose les points rangés par ordre d'abscisses croissantes, c'est-à-dire $a_i \leq a_j$ pour $0 \leq i < j < n$.

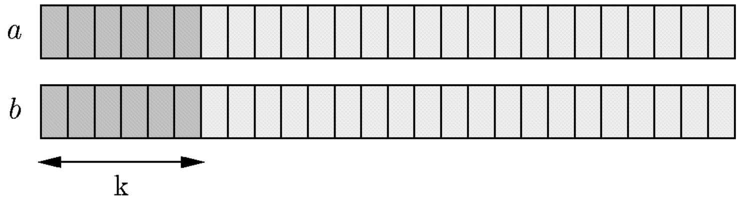
Question 2 Écrire une fonction *echange* prenant comme arguments les tableaux a et b, les indices i et j et qui échange, dans chacun des tableaux a et b, les valeurs contenues aux indices i et j.

Les points définissant la partie sud-ouest de l'enveloppe sont les points P_i tels que : $a_j \leq a_i$ et $b_j \leq b_i$ implique $a_j = a_i$ et $b_j = b_i$ pour tout j $(0 \leq j < n)$.

Question 3 Dans l'exemple précédent, donner parmi les 20 points P_i, les points définissant la partie sud-ouest de l'enveloppe.

Question 4 Écrire une fonction *frontiereSO* prenant en argument les tableaux a et b et retournant le nombre k de points définissant la partie sud-ouest de l'enveloppe Manhattan des n

points de coordonnées a_i et b_i. On modifiera les tableaux a et b pour qu'ils contiennent dans leur k premières places les coordonnées des points définissant la partie sud-ouest de l'enveloppe, rangées en ordre d'abscisses croissantes.



Après avoir exécuté la fonction précédente, on suppose qu'une fonction range dans deux tableaux *aSO*, *bSO* les coordonnées des points précédemment trouvés, qui définissent la partie sud-ouest. Une variable globale *nSO* a pour valeur le nombre de ces points.

Tracé de l'enveloppe

Les points définissant la partie nord-ouest de l'enveloppe sont les points P_i tels que $a_j \leq a_i$ et $b_j \geq b_i$ implique $a_j = a_i$ et $b_j = b_i$ pour tout j $(0 \leq j < n)$.

Question 5 Donner les points définissant la partie nord-ouest de l'enveloppe sur l'exemple. Modifier la fonction précédente pour obtenir la fonction *frontiereNO* correspondante pour la partie nord-ouest de l'enveloppe.

Question 6 Écrire également les fonctions *frontiereSE* et *frontiereNE* correspondant aux parties sud-est et nord-est.

On suppose à présent que les coordonnées des points précédemment trouvés, qui définissent les partie sud-ouest, nord-ouest, sud-est et nord-est, sont rangées respectivement dans des tableaux *aSO*, *bSO*, *aNO*, *bNO*, *aSE*, *bSE*, *aNE*, *bNE*, et toujours classées par ordre d'abscisses croissantes. Soient *nSO*, *nNO*, *nSE*, *nNE* les nombres de ces points. On suppose également qu'il existe deux fonctions graphiques *moveTo* et *lineTo* telles que :

- *moveTo(x,y)* déplace le point courant au point (x, y),
- *lineTo(x,y)* trace un segment du point courant jusqu'au point (x, y). Après le tracé, le point courant devient le point de coordonnées (x, y).

Question 7 Écrire une fonction qui dessine l'enveloppe Manhattan. (Cette fonction utilise les 12 variables globales *aSO*, *bSO*, *aNO*, *bNO*, *aSE*, *bSE*, *aNE*, *bNE*, *nSO*, *nNO*, *nSE*, *nNE*.)

Question 8 L'enveloppe peut-elle produire un polygone croisé ? Si oui, donner une piste pour résoudre ou éviter ce problème. $O(1)$ opérations.

* *
*